This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

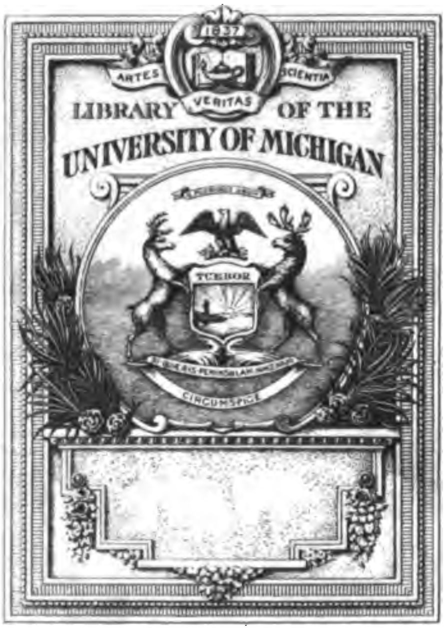
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
302
.C31
1750

METHODE
POUR
LA MESURE DES SURFACES, LA DIMENTION DES SOLIDES, LEURS CENTRES DE PESANTEUR, DE PERCUSSION ET D'OSCILLATION

Par l'Application du Calcul intégral.

Par M. CARRÉ, de l'Académie Royale des Sciences.

A PARIS,
Chez DURAND, Libraire, rue Saint Jacques, à S. Landry & au Griffon.

M. DCC. L.

AVEC APPROBATION ET PERMISSION.

Hist. of Sci.
Clarkville
5-26-27
65105

PREFACE.

JAMAIS on n'a tant cultivé les Sciences que dans le siécle où nous sommes, & l'on peut dire que jamais on n'y a fait tant de progrès, surtout dans les Mathématiques, qui ont fait de tout tems l'étude des Esprits les plus sublimes. Aussi sont-elles portées à un tel dégré de perfection, qu'il faudra dans la suite être un homme d'un génie rare & extraordinaire pour y faire de nouvelles découvertes. La plus belle qu'on ait faite jusqu'à présent est sans doute le *Calcul différentiel*, qui consiste comme l'on sçait à descendre des grandeurs à leurs différences

infiniment petites pour en découvrir leurs rapports, & par ces rapports ceux des grandeurs dont elles sont les différences. Il paroît que l'on a découvert tout ce qu'on pouvoit souhaiter sur ce calcul, comme il est facile de le voir par le sçavant Livre * de l'illustre *M. le Marquis de l'Hôpital.* Mais il en reste un autre qu'on appelle *Calcul intégral*, qui consiste à remonter aux grandeurs, c'est-à-dire à trouver la somme de leurs différences. Ce calcul renferme de grandes difficultés; & l'on peut dire qu'il est aussi difficile de trouver l'intégrale d'une différentielle dans une infinité de cas, qu'il est facile de prendre la différentielle d'une intégrale quelconque. Il m'a paru même en le tentant dans beaucoup d'exemples, qu'il n'étoit pas aisé de connoître si certaines quantités sont intégrables, à cause des termes qui se sont évanoüis en *différentiant*, & qu'on est quelquefois obligé de retrouver en *intégrant*, & pour d'autres raisons qui ne sont pas de ce lieu; & j'ose assurer que si l'on pouvoit trouver des régles générales de ce calcul comme on en a pour le différentiel, l'on n'auroit plus rien à désirer dans les Mathématiques, ce qui paroîtra sans doute

* *Analyse des Infiniment Petits.*

un paradoxe à ceux qui n'en connoiſſent pas l'étenduë.

Je ne doute pas que pluſieurs perſonnes ne travaillent ſur cette matiere, & qu'on n'y ait déja fait un grand nombre de découvertes; mais je ſuis perſuadé qu'il en reſte encore beaucoup plus à trouver; car il n'eſt pas poſſible d'épuiſer une ſcience ſi vaſte & ſi profonde, qui peut ſervir à réſoudre d'une maniére infiniment générale tous les plus fameux problêmes, ou qui ont été déja trouvés par d'autres méthodes, ou qu'on trouvera dans la ſuite; comme la Méthode inverſe des tangentes, c'eſt-à-dire, la maniere de connoître la nature des courbes, dont on a l'expreſſion des ſou-tangentes, la Rectification des courbes, la Quadrature des eſpaces, la Dimenſion des ſolides, les Centres de peſanteur, de percuſſion, d'oſcillation &c. J'applique ici le *Calcul intégral* pour déterminer la valeur de quelques ſurfaces, la Dimenſion des ſolides, leurs Centres de peſanteur, de percuſſion & d'oſcillation. Je ne prétens pas dire beaucoup de choſes nouvelles. Car outre que je ne donne pas les régles de ce calcul, lorſque la quantité propoſée dont on veut avoir l'in-

tégrale, n'est point le produit d'une différentielle par le multiple de son absoluë élevée à une puissance quelconque, je ne l'étens point aux courbes transcendantes. Je laisse cela aux Maîtres de l'Analyse qui ont plus de tems & plus d'étenduë d'esprit que je n'en ai pour pénétrer dans les Mathématiques abstruses, & qui peut-être ne voudroient pas descendre dans de petits détails qui sont si nécessaires à ceux qui commencent, & c'est en partie ce qui m'a déterminé à travailler sur ce sujet. Cet Ouvrage auroit peut-être été beau il y a cinquante ans; mais ces Sciences ont été poussées si loin depuis ce tems-là, que l'on ne doit le regarder que comme un essai de l'application du *Calcul intégral* pour en faire voir la beauté & la fécondité, puisqu'on découvre par là avec une facilité merveilleuse des choses que l'on ne pourroit touver par la Géométrie ordinaire sans beaucoup de travail & de peine, & peut-être quelques-unes ou elle ne pourroit atteindre. Et l'on s'en persuadera aisément si on prend garde au grand nombre de problêmes que l'on résoud ici en peu de mots, & la plûpart d'une maniére si générale que tous les cas particuliers qui s'é-

tendent à l'infini y sont renfermés, ensorte que l'on admirera sans doute la simplicité de la méthode dont on se sert. Si l'on ne fait pas toûjours de nouvelles découvertes, on doit du moins tâcher de perfectionner les anciennes, & c'est beaucoup que de les rendre plus faciles & plus générales; c'est même ce qui fait la beauté d'une méthode que sa généralité: car les Géométres qui résolvent leurs problêmes d'une maniére particuliére, ne rendent souvent guéres plus habiles ceux qui lisent leurs solutions. Ce petit Ouvrage ne sera pas semblable à un de ceux d'un des plus célebres Mathématiciens de ce siécle, quoiqu'on y traite à peu près des mêmes choses. Voici comme le *P. Pardies* en parle * : *J'ai trouvé que cet Ouvrage* (de M. Wallis) *excellent en soit & admirable, est plus propre à contenter ceux qui sont déja consommés dans cette Science qu'à instruire ceux qui veulent l'apprendre. Car outre qu'il s'en faut bien qu'il ne comprenne tout, il est écrit d'une maniére si savante & si géometrique, qu'il y a fort peu de personnes capables de le comprendre.* Celui-ci au contraire sera très-facile; car outre qu'il suppose peu de Géométrie, les calculs en sont

* *Preface de la Statique.*

aiſés. Il ſeroit pourtant bon d'avoir lû la premiére Section du Livre de *l'Analyſe des Infiniment Petits.* Ce Traité eſt diviſé en quatre Sections. On traitera dans la premiere de la Meſure des Surfaces. Dans la ſeconde, de la Dimenſion des Solides. On déterminera dans la troiſiéme leurs Centres de Peſanteurs. Et dans la quatriéme on parlera des Centres de Percuſſion & d'Oſcillation.

APPROBATION.

J'AI lû par ordre de Monseigneur le Chancelier un Livre qui a pour titre : *Méthode pour la Mesure des Surfaces, la Dimention des Solides, &c. par M. Carré:* dont il m'a paru que la réimpression seroit utile au Public. A Paris ce 10 Mars 1749.

DE MONT-CARVILLE.

PERMISSION.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & feaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlemens, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre amé LAURENT DURAND, Libraire à Paris, Nous a fait exposer qu'il désireroit faire réimprimer & donner au Public un Livre qui a pour titre: *Méthode pour la Mesure des Surfaces, par M. Carré*, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Permissions pour ce nécessaire. A ces causes, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer ledit Livre en un ou plusieurs volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de

le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de trois années consécutives, à compter du jour de la datte des Présentes. Faisons défenses à tous Libraires, Imprimeurs & autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéïssance; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Régistre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris dans trois mois de la datte d'icelles, que la réimpression dudit Livre sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée attachée pour modéle, sous le contre-scel des Présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725. qu'avant de l'exposer en vente, l'imprimé qui aura servi de copie à la réimpression dudit Livre, sera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque Publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un en celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, le tout à peine de nullité des Présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayant cause plainement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons qu'à la copie des Présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Livre foi soit ajoutée comme à l'Original; commandons au premier notre Hussier ou Sergent sur ce requis de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraire. Car tel est notre plaisir. Donné à Paris le dix-neuviéme jour

du mois de Mars, l'an de grace mil ſept cent cinquante, & de notre Regne le trente-cinquiéme. Par le Roi en ſon Conſeil.

SAINSON.

Regiſtré ſur le Régiſtre XII. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 401. Fol. 280. conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du 28 Février 1723. A Paris le 12 Avril 1750.

T. LE GRAS, Syndic.

TABLE.

SECTION I. *De la Mesure des Surfaces*, pag. 1.

SECTION II. *De la Dimension des Solides*, 40.

SECTION III. *Des Centres de Pesanteur*, 70.

SECTION IV. *Des Centres de Percussion &c.* 103.

AVIS.

Quelqu'attention que l'on ait à corriger ces sortes d'Ouvrages, il y reste toûjours quelques fautes, & même de celles que l'on a corrigées : Ainsi on prie le Lecteur d'y avoir égard.

METHODE

METHODE
POUR
LA MESURE DES SURFACES,
LA DIMENSION DES SOLIDES,
LEURS CENTRES DE PESANTEUR, DE PERCUSSION ET D'OSCILLATION.

SECTION PREMIERE.

DE LA MESURE DES SURFACES.

LES Géométres ont coûtume de considérer la plûpart des Surfaces comme composées d'une infinité de lignes paralleles droites ou courbes, qu'ils regardent comme autant de parallelogrammes, dont la largeur est infiniment petite, & les Solides comme composés d'une infinité de Surfaces aussi paralleles droites ou courbes, qu'ils prennent pour autant de Solides qui ont pour hauteur une grandeur infiniment petite, & qui sont les élé-

mens d'une figure proposée. Ainsi concevant la hauteur d'une figure quelconque divisée en une infinité de petites parties égales, on les regardera comme autant de differences que l'on exprimera par la charactéristique *d*, & qui seront la largeur des parallelogrammes, ou la hauteur des Solides infiniment petits, qui composent une figure. Par exemple, dans l'espace parabolique *AMBD*, FIG. 1. si l'on conçoit que l'axe ou la hauteur *AD* soit divisée en un nombre infini de parties égales, & qu'on mene par tous ces points de division des ordonnés *PM*, *pm*, il est clair qu'elles rempliront l'espace; multipliant donc chacune de ces ordonnées par une partie *Pp* infiniment petite de la hauteur *AD*, on formera autant de petites surfaces ou de petits parallelogrammes *pM* (car *pm* étant supposée infiniment proche de *PM*, le triangle *MRm* devient infiniment petit, & par conséquent nul par rapport au parallelogramme *pM*. Il en faut dire autant de la portion de Solide décrite par ce triangle *MRm* dans la révolution de la figure) qui seront autant de *différentielles* de l'espace, & dont la somme vaut l'espace parabolique cherché. De même dans le Conoïde parabolique qui est un solide formé par la revolution de la demi-parabole *AMB* autour de l'axe *AD*, il est évident que toutes les ordonnées *PM*, *pm* décriront dans ce mouvement des surfaces circulaires, lesquelles étant multipliées par une partie *Pp* de la hauteur, donneront autant de petits Solides qui seront les differentielles ou les élemens qui composent le Solide entier, & dont la somme est égale au Solide cherché. Or pour avoir la somme ou ce qui est la même chose, pour prendre l'*intégrale* de ces differentielles, il faut les exprimer en termes analytiques, & que les quantitez variables soient de même espece que la difference, ou au contraire. Par exemple, dans l'espace parabolique *AMBD*, nommant *PM*, *y*; & *Pp*, *dx*, on aura pour son élement differentiel *ydx*, qui est un produit de deux quantitez de differente espece; on substituera donc à la place de *y* ou de *dx*, leur valeur pour avoir

tout en y ou en x, puis on prendra l'integrale de la quantité qui en résultera. Il en est de même pour les Solides.

Mais il est démontré que pour prendre la difference d'une quantité variable élevée à une puissance quelconque, il faut la multiplier par l'exposant de la puissance & par sa difference, & abaisser la puissance d'une unité, ainsi la difference de x^m est $m\,x^{m-1}dx$. Donc pour avoir l'intégrale d'une differentielle quelconque, il faut élever la quantité variable de la differentielle à une puissance plus grande de l'unité, & la diviser par l'exposant de cette puissance & par sa difference. D'où l'on peut tirer cette regle.

REGLE GENERALE dont on se servira dans la résolution des Problêmes suivans, pour trouver par le calcul *l'intégrale* d'une differentielle.

On élevera la quantité variable de la differentielle à une puissance plus grande de l'unité, & on la divisera par l'exposant de cette puissance & par sa difference. Car l'intégrale de la differentielle d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite est égale au quotient de cette quantité élevée à une puissance plus grande d'une unité divisée par son exposant & par sa difference. Ainsi l'integrale de cette differentielle $m\,x^{m-1}dx$ sera par la regle $\frac{m\,x^{m-1+1}dx}{\overline{m-1+1}\times dx}=x^m$: m marque tout nombre entier ou rompu, positif ou négatif. Si $m=3$, on aura $3\,xx\,dx$; dont l'intégrale $=x^3$; si $m=\frac{1}{3}$, on aura $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}dx=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$, dont l'integrale $=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$. Si la differentielle étoit $\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}dx$, son intégrale seroit $x^{\frac{1}{m}}$, &c.

On pourroit encore démontrer cette regle par induction; dont voici quelques exemples.

Soit cette differentielle $y\,dx=\frac{b\,x\,dx}{a}$ qui est celle de

FIG. 2. triangle ABC, en nommant AP, x; PM, y. Son intégrale sera par la regle $\frac{bxx}{2a} = \frac{xy}{2}$, en remettant y pour sa valeur $\frac{bx}{a}$. Il faut donc démontrer que $\frac{xy}{2}$ est la somme des ydx.

Soit achevé le parallelogramme $ABCD$. Il est clair que le triangle ABC est égal à la somme des ydx, & le triangle ADC à celle des xdy; or la somme des ydx plus celle des xdy valent le parallelogramme entier $= xy$; donc par la géometrie ordinaire $\frac{xy}{2} =$ la somme des ydx; c'est à dire au triangle ABC. Ce qu'il falloit démontrer.

FIG. 1. Soit encore cette differentielle $ydx = x^{\frac{1}{m}}dx$ qui exprime l'élement infiniment petit de l'espace parabolique ABD. Il est clair que la somme de tous ces élemens vaut l'espace parabolique. Or par la regle cette somme ou l'intégrale de $x^{\frac{1}{m}}dx$ est égale à $\frac{m}{m+1}x^{\frac{1}{m}+1} = \frac{m}{m+1}xy$ en remettant pour $x^{\frac{1}{m}}$ sa valeur y. Il faut donc prouver que $\frac{m}{m+1}xy$ est la somme des ydx.

Soit achevé le parallelogramme $ADBC$; il est clair que l'espace interieur ABD est égal à la somme de ydx, & l'exterieur ABC à celle des xdy. Mais par la méthode des tangentes $dy.dx :: y.t$; donc $ydx = tdy$: & dans la parabole $t = mx$; donc $ydx = mxdy$, d'où l'on tire $\frac{xdy}{ydx} = \frac{1}{m}$: or la somme des ydx plus celle des xdy valent le parallelogramme $ADBC = xy$; donc $\frac{\int ydx + \int xdy}{\int ydx} = \frac{xy}{\int ydx} = \frac{m+1}{m}$, parce que cette raison est constante; d'où l'on tire $\int ydx = \frac{m}{m+1}xy$; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

1. TROUVER *la surface d'un triangle quelconque.*

Soit le triangle BAC; ayant abaissé du sommet A sur la base $BC=b$, une perpendiculaire $AD=a$, on menera une ligne quelconque MM parallele à BC, qu'on nomme y; & une autre infiniment proche mm; & supposant $AP=x$; $Pp=dx$; on aura $y\,dx=$ au petit espace $MMmm$ qui est la differentielle du triangle. Mais à cause des triangles semblables MAM, BAC, $x.y::a.b$; d'où l'on tire $y=\frac{bx}{a}$: on aura donc $y\,dx=\frac{bx\,dx}{a}$, dont l'intégrale $=\frac{bxx}{2a}=MAM$; ce qui donne $\frac{ab}{2}$ pour la valeur du triangle BAC, parce que le point P étant en D, x devient $=a$. FIG. 1.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

2. TROUVER *la Surface d'un cercle.*

Soit le cercle $ADBE$; si l'on conçoit qu'un de ses rayons CA soit divisé en une infinité de parties égales, & que du centre par tous ces points on décrive des circonferences; il est évident qu'elles rempliront l'espace circulaire. Soit une de ces circonferences $PMQO$, & une autre infiniment proche $pmqo$. Ayant nommé la circonference de ce cercle, c; son rayon, r; sa partie CP, x; donc $Pp=dx$. Pour avoir la circonférence décrite par le point P, on fera $r.c::x.\frac{cx}{r}=$ à la circonference $PMQO$, & multipliant par dx, on aura $\frac{cx\,dx}{r}$ pour la surface annulaire infiniment petite qui est la differentielle de l'espace; dont l'intégrale $=\frac{cxx}{2r}=$ à l'aire du cercle qui a pour FIG. 2.

rayon CP; ce qui donne pour celle du cercle entier $\frac{cr}{2}$, parce que P en A, x devient $= r$.

AUTRE MANIERE.

FIG. 5. 3. Ayant mené dans le cercle CAB deux rayons infiniment proches CA, CB, ils formeront un Secteur de cercle que l'on peut regarder comme un triangle rectiligne à cause de l'infinie petitesse de l'arc AB, dont la hauteur est le rayon même du cercle: nommant donc l'arc

*Art. 1. AB, dx; on aura * $\frac{r\,dx}{2} =$ au petit Secteur CAB dont l'integrale $= \frac{rx}{2} = \frac{rc}{2}$, lors que l'arc AB devient la circonference entiere $= c$.

COROLLAIRE.

4. Il est évident, 1°. que la surface d'un cercle est égale à un triangle qui auroit pour base la circonference developpée, & pour hauteur le rayon de ce cercle. 2°. Que le quarré du diametre d'un cercle est à l'aire de ce cercle, comme le diametre est au quart de la circonference.

AVERTISSEMENT.

Il est bon d'avertir ici que c'est des prismes, des pyramides, des cylindres & des cones droits que se doit entendre tout ce qu'on en va dire dans cet ouvrage.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

FIG. 6. 5. TROUVER *la surface d'un Prisme.*

Il est évident que chaque face du prisme est un parallelogramme. Prenant donc la valeur de chacun de ces parallelogrammes, & en faisant une somme, on aura la surface cherchée. Ainsi la surface d'un prisme est égale à un parallelogramme qui a pour hauteur celle du prisme, & pour base le circuit de la base du prisme.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

6. TROUVER *la surface d'une Pyramide réguliere.* FIG. 3.

Chaque face de la pyramide réguliere, est un triangle: prenant donc la valeur de chacun de ces triangles, & en faisant une somme, on aura la surface cherchée. Ainsi la surface d'une pyramide est égale à un triangle dont la hauteur est égale à la hauteur d'un des triangles qui la composent, & la base égale à la moitié du circuit de la base de la pyramide.

COROLLAIRE.

7. Il est évident que la surface de la pyramide est à la surface du prisme de même base & de même hauteur qu'une des faces de la pyramide, comme 1 est à 2.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

8. TROUVER *la surface d'un Cylindre.* FIG. 4.

On peut considérer la surface d'un Cylindre comme composée d'une infinité de circonférences égales, posées les unes sur les autres, ou d'une infinité de petits parallelogrammes qui ont pour base des portions de circonferences: Si donc on multiplie une de ces circonferences que je nomme c, par la hauteur du cylindre que j'appelle a, ou ce qui est la même chose, un de ces petits parallelogrammes par la circonference, on aura ac pour la surface cherchée. Ainsi la surface d'un cylindre, ou une de ses portions comprise entre deux lignes droites, est égale à un parallelogramme qui a pour hauteur celle du cylindre, & pour base le circuit du cylindre, ou la portion de ce circuit comprise entre ces deux droites.

Il en est de même de la surface d'un Solide quelconque

droit, dont la base n'est pas circulaire, mais elliptique, parabolique, hyperbolique, ou quelque autre ligne courbe que ce soit.

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

FIG. 9. 9. TROUVER *la surface d'un Cone dont la Section par l'axe soit le triangle* BAC.

Soit du sommet A abaissée la perpendiculaire AD qui en sera l'axe. Si on conçoit que cette ligne soit divisée en une infinité de parties égales, & que de tous ces points on mene des perpendiculaires MP, mp, il est clair que le triangle rectangle ADB tournant sur l'axe AD, tous les points M, m décriront des circonferences qui formeront la surface du Cone; & pour avoir la somme de toutes ces circonferences, je raisonne ainsi, après avoir nommé le rayon de la base, r; la circonference, c; AD, a; AP, x, donc $Pp = dx$, PM, y, donc $mR = dy$, & $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$: $r.c::y.\frac{cy}{r}$ = la circonference décrite par le point M, & $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$ = la differentielle de la surface. Mais à cause des triangles semblables APM, ADB on aura $x.y::a.r$, d'où l'on tire $x = \frac{ay}{r}$, & en prenant la difference $dx = \frac{ady}{r}$, & $dx^2 = \frac{aady^2}{rr}$; mettant donc cette valeur dans $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$ on aura $\frac{cydy}{rr}\sqrt{rr+aa}$, dont l'integrale $= \frac{cyy}{2rr}\sqrt{rr+aa} = \frac{c}{2}\sqrt{rr+aa}$, lorsque P est en D, parce qu'alors $y = r$: Mais $\sqrt{rr+aa} = AB$ côté du Cone; donc la surface du Cone est égale à la circonference de la base multipliée par la moitié du côté.

AUTRE MANIERE.

10. On peut regarder la surface du Cone comme composée

posée d'une infinité de petits triangles qui ont pour base une portion de circonference, & pour hauteur le côté même du Cone : Si donc on prend la valeur d'un de ces petits triangles, & qu'on la multiplie par la circonference de la base du cone, on aura la surface cherchée. Ainsi cette surface est égale à un triangle qui a pour hauteur le côté du cone, & pour base la demie circonférence de la base du cone.

COROLLAIRE.

11. Il est clair 1°. Que la surface du cone est à la surface du cylindre de même base, & qui a pour hauteur le côté du cone, comme 1 est à 2.

2° Que la surface du cylindre qui a pour hauteur le rayon du cercle de sa base est à la surface de ce cercle comme 2 est à 1. Car la surface du cylindre $= cr$, & celle du cercle $= \frac{1}{2} cr$. De même la portion de surface du cylindre qui a pour base l'arc d'un Secteur, & pour hauteur le rayon, est à ce Secteur comme 2 est à 1.

3°. Donc ces surfaces cylindriques, coniques & circulaires, sont entr'elles comme 2, $\sqrt{2}$, & 1; & par conséquent elles sont continuellement proportionnelles.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

12. TROUVER *un cercle égal à la surface d'un cylindre donné.*

Soit la hauteur du cylindre $= a$, la circonference de la base $= c$, & son rayon $= r$, on aura ac pour la valeur de la surface; soit de plus le rayon du cercle cherché $= y$; on dira $r . c :: y . \frac{cy}{r} =$ la circonference de ce cercle, qui sera * $= \frac{cyy}{2r} = ac$ par l'hypothese, d'où l'on tire $yy = 2ar$. Ainsi si l'on prend une moyenne proportionnelle entre la hauteur du cylindre & le diametre de la base, elle sera le rayon du cercle cherché.

* Art. 4.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

13. TROUVER *la surface d'un cylindre égale à un cercle donné.*

Comme la question est indeterminée, on peut prendre pour la hauteur du cylindre ou pour la circonference de sa base telle grandeur que l'on voudra.

Soit le cercle $= \frac{cr}{2}$, ayant pris a pour la hauteur du cylindre, & x pour la circonference de sa base, on aura pour la surface $ax = \frac{cr}{2}$, d'où l'on tire $x = \frac{cr}{2a}$. On feroit le même raisonnement si c'étoit la circonférence de la base qui fût donnée.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

14. TROUVER *un cercle égal à la surface d'un cone donné.*

Ayant nommé le côté du cone donné a, le rayon du cercle que l'on cherche, x; & supposé que $\frac{c}{r}$ exprime le rapport du rayon à la circonférence, on aura $r. c :: x. \frac{cy}{r}$ = la circonference du rayon x, donc le cercle cherché $= \frac{cxx}{2r} = \frac{ac}{2}$ surface du Cone, d'où l'on tire $x = \sqrt{ar}$; donc si l'on prend une moyenne proportionnelle entre le côté du cone & le rayon de sa base, cette ligne sera le rayon du cercle cherché.

Si l'on vouloit trouver un cercle égal à la surface d'un cone tronqué, on acheveroit le cone, puis l'on prendroit la surface du cone entier, ensuite celle du cone ajoûté, & on l'ôteroit du tout, le reste feroit la surface du cone tronqué; & on feroit les mêmes raisonnemens que cy-dessus.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

15. TROUVER *la surface d'un cone égale à un cercle donné.*

Soit le côté du cone $= a$, & le rayon de sa base $= x$, on aura $\frac{cx}{r}$ pour la circonférence de sa base, & $\frac{acx}{2r}$ pour sa surface qui doit être égale par l'hypothese à $\frac{cr}{2}$, d'où l'on tire $x = \frac{rr}{a}$ valeur du rayon cherché de la base du cone.

COROLLAIRE I.

16. La surface du cone est au cercle qui lui sert de base; comme le côté du cone est au rayon du cercle. Car la surface du cone $= \frac{ac}{2}$, & celle du cercle $= \frac{cr}{2}$: or $\frac{ac}{2} . \frac{cr}{2} :: a . r$; donc &c.

COROLLAIRE. II.

17. Les surfaces de deux cones droits sont entr'elles en raison composée de leurs côtez & des rayons de leurs bases. Soient a & b les côtez des deux cones, & c & d les circonferences de leurs bases, on aura pour leurs surfaces, $\frac{ac}{2}$ & $\frac{bd}{2}$. Or les rayons des cercles sont entr'eux comme leurs circonférences, donc les surfaces des cones seront entr'elles en raison composée de leurs côtez & de leurs rayons.

Si les côtez de ces cones étoient paralleles, les surfaces seroient entr'elles en raison des quarrez de leurs côtez. Car leurs côtez seroient entr'eux comme les rayons.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

18. TROUVER *un cone dont la surface soit égale à celle d'un cylindre donné.*

Ayant nommé la surface du cylindre donné, ac; le côté du cone, b; le rayon de sa base, x; on dira $r. c :: x. \frac{cx}{r} =$ la circonférence de la base du cone, donc sa surface sera $\frac{bcx}{2r} = ac$ par la supposition; d'où l'on tire $x = \frac{2ar}{b}$ valeur du rayon de la base du cone cherché.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

19. TROUVER *un cylindre dont la surface soit égale à celle d'un cone donné.*

Soit la surface du cone $= \frac{bc}{2}$, la hauteur du cylindre $= a$, & le rayon de sa base $= x$, on aura pour la circonference du cylindre $\frac{cx}{r}$, & pour sa surface $\frac{acx}{r} = \frac{bc}{2}$ par l'hyp. d'où l'on tire $x = \frac{br}{2a}$ valeur du rayon cherché de la base du cylindre. Donc &c.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

FIG. 10. 20. TROUVER *la surface d'une Sphere.*

Soit le demie-cercle ABD que l'on conçoit tourner autour du diametre AD, il est clair qu'il décrira dans ce mouvement une Sphere, que chaque point de la circonference de ce demi-cercle décrira une circonference entiere, & que la somme de toutes ces circonferences est égale à la surface de la Sphere.

Maintenant soit menée une ordonnée quelconque $MP = y$, & une autre infiniment proche mp, & soit MR parallele à AD, on aura $mR = dy$; soit le rayon BC ou $AC = r$; $AP = x$, donc Pp ou $MR = dx$. On dira $r. c :: y. \frac{cy}{r} =$ la circonférence décrite par le point M, & multipliant cette grandeur par l'arc $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, on

aura $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$ = la portion annulaire infiniment petite de la surface de la Sphere. Mais à cause du cercle $yy = 2rx - xx$, & prenant la difference de cette équation, on aura $ydy = rdx - xdx$, d'où l'on tire $dy = \frac{rdx - xdx}{y}$, & $dy^2 = \frac{rrdx^2 - 2rxdx^2 + xxdx^2}{2rx - xx}$, mettant donc cette valeur à la place de dy^2 dans $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$, il viendra $\frac{cydx}{\sqrt{2rx-xx}} = cdx$ en mettant pour y sa valeur; & prenant l'intégrale de cette grandeur, on aura cx pour la portion de la surface de la Sphere faite par la révolution de l'arc AM: & $2cr$ pour la surface entiere, parce que x devient $= 2r$.

AUTRE MANIERE.

21. Les mêmes choses étant posées, on ménera au point M le rayon CM, & on aura deux triangles semblables CPM, MRm: car ils sont rectangles en P & en R, & de plus l'angle RMm que l'on regarde comme rectiligne à cause de l'infinie petitesse de l'arc Mm, est égale à l'angle PMC: car l'angle CMm est égal à un droit, & les deux PMC, CMR joints ensemble valent aussi un droit; ôtant donc la partie commune CMR, on aura $RMm = PMC$. On aura donc $PM(y.)\ MC.(r) :: MR\ (dx).\ Mm = \frac{rdx}{y}$, & multipliant cette valeur par $\frac{cy}{r}$ = la circonférence décrite par le point M, on aura comme auparavant cdx pour la differentielle de la surface spherique, d'où l'on tirera les mêmes valeurs. FIG. 10.

COROLLAIRE I.

22. Il est évident que la surface $2cr$ de la Sphere est quadruple de son grand cercle $= \frac{cr}{2}$.

COROLLAIRE II.

23. La surface d'un segment quelconque de Sphere

coupé par un plan ou par deux plans paralleles est à la surface entiere de la sphere, en même raison que la portion du diametre coupé par le plan ou par les plans, est au diametre entier. Si on répréfente par un cercle la surface de la Sphere, on verra évidemment qu'un segment quelconque de ce cercle est au cercle entier, comme la partie correspondante du diametre est au diametre; donc &c. De là il est facile de connoître la surface d'un segment de sphere, si on connoît la portion du diamettre qui correspond à ce segment, & par conséquent de connoître une portion quelconque de surface de sphere coupée par deux plans paralleles.

On peut encore démontrer ceçi en considérant que la surface de la sphere est égale à la surface d'un cylindre, qui a pour base la circonference d'un grand cercle de la sphere, & pour hauteur le diametre de la sphere; ainsi les segmens de la surface spherique seront égaux aux segmens correspondans dans la surface du cylindre; mais les segmens de surfaces cylindriques sont proportionnels à leurs hauteurs; donc &c.

COROLLAIRE III.

24. La portion de surface spherique comprise entre deux grands cercles qui ont pour commune section le diametre de la sphere, est à la surface entiere, comme l'angle d'inclinaison que font ces deux cercles en se coupant, est à quatre angles droits. Cela est évident par la génération de la sphére.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

25. TROUVER *un cercle égal à la surface d'une sphere donnée.*

* Art. 10. Soit la surface de la sphere $= 2\,cr$ *, & soit x le rayon du cercle cherché, on dira, $r.c::x.\frac{cx}{r}$, donc le cercle cher-

ché $= \frac{cxx}{2r} = 2cr$, d'où l'on tire $x = 2r$, c'eſt à dire que le rayon de ce cercle eſt égal au diametre de la ſphere.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

26. TROUVER *une ſphere dont la ſurface ſoit égale à un cercle donné.*

Soit le cercle donné $= \frac{cr}{2}$ & le rayon de la ſphere cherchéé $= x$, on aura $\frac{cx}{r}$ pour la circonférence de ce rayon ou d'un grand cercle de la ſphere: Donc ſa ſurface ſera* $= \frac{2cxx}{r} = \frac{cr}{2}$, d'où l'on tire $x = \frac{r}{2}$ pour le rayon de la ſphere cherchée. * *Art.* 20.

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

27. TROUVER *un cylindre dont la ſurface ſoit égale à la ſurface d'une ſphere donnée.*

Soit a la hauteur du cylindre, & x la circonference de ſa baſe, ainſi la ſurface du cylindre ſera $ax = 2cr$*, d'où l'on tire $x = \frac{2cr}{a}$ pour la circonférence cherchée, & ſon rayon ſera $= \frac{2rr}{a}$. * *Art.* 20.

PROPOSITION XVII.

PROBLEME.

28. TROUVER *une Sphere dont la ſurface ſoit égale à celle d'un Cylindre donné.*

Soit la ſurface du cylindre $= ac$*, & le rayon de la ſphere $= x$, on dira $r.c :: x.\frac{cx}{r} =$ la circonférence du grand cercle de la ſphere, donc ſa ſurface ſera* $\frac{2cxx}{r} = ac$, d'où * *Art.* 8. * *Art.* 20.

l'on tire $x = \sqrt{\frac{ar}{2}}$. Ainsi le rayon de la sphere est une ligne moyenne proportionnelle entre le rayon du cercle de la base du cylindre & la moitié de sa hauteur.

COROLLAIRE I.

29. La surface d'un cylindre circonscrit à la sphere & dont la hauteur est égale au diametre de la sphere, est quadruple de sa base, qui est égale au grand cercle de la sphere : Car la surface cylindrique $= 2cr$, & la circulaire $= \frac{cr}{2}$; donc &c.

COROLLAIRE II.

30. La surface de ce même cylindre sans les deux bases est égale à la surface de la sphere, & ayant ajoûté les deux bases, la surface entiere du cylindre est à la surface de la sphere comme 3 est à 2.

PROPOSITION XVIII.

PROBLEME.

31. TROUVER *un cone dont la surface soit égale à celle d'une sphere.*

Soit le côté du cone $= b$, & la circonférence de sa base $= x$, on aura pour sa surface $\frac{bx}{2} = 2cr$, d'où l'on tire $x = \frac{4cr}{b}$ valeur de la circonférence de la base, & le rayon sera $= \frac{4rr}{b}$.

PROPOSITION XIX

PROBLEME.

32. TROUVER *la surface d'une sphere égale à la surface d'un cone donné.*

* Art. 9. Soit la surface du cone * $= \frac{be}{2}$, & le rayon de la sphere cherchée

cherchée $= x$, on dira $r.\ c.\ x.\ \frac{cx}{r} =$ la circonférence du grand cercle de la Sphere, donc sa surface sera* $= \frac{2cxx}{r} = \frac{bc}{2}$; d'où l'on tire $4xx = br$; donc si on prend une moyenne proportionnelle entre le côté du cone, & un quart du rayon de sa base, on aura le rayon de la sphere cherchée. * Art. 10.

COROLLAIRE.

33. Il est évident que la surface conique est à la surface spherique de même rayon que la base du cone, comme le côté du cone est à quatre fois le rayon : car $\frac{bc}{2}.\ 2cr :: b.4r.$

PROPOSITION XX.

PROBLEME.

34. TROUVER *l'espace renfermé par la Lunule d'Hippocrate.*

Soit du diametre AB décrit le demi-cercle ADB, & mené à angles droits un autre diametre DE, soient du point E tirées les soûtendantes EA, EB, & soit enfin du rayon EA décrit l'arc du cercle AFB, la figure comprise entre la demie-circonférence ADB & l'arc AFB, est ce qu'on appelle la Lunule d'Hippocrate, dont on demande la valeur. FIG. 11.

Ayant nommé le diamettre AB, $2r$; la soûtendante EA sera $= r\sqrt{2}$,* donc le cercle décrit du rayon EA est double de celui qui est décrit du rayon CD : car les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons; nommant donc c, la circonférence de celui qui a pour rayon CD, on aura pour sa valeur $\frac{cr}{2}$, & cr pour celle du cercle dont le rayon est EA. D'où l'on peut conclure en passant que pour avoir un cercle double d'un autre, il faut prendre pour rayon la soûtendante du quart du premier cercle. Mais le secteur $AFBEA$ est un quart de cercle; donc il est égal au demi-cercle $ADBA$; d'où il est évi-

dent que la Lunule est égale au triangle AEB; ce qu'il falloit &c.

Ce n'est pas seulement de l'espace entier renfermé par cette Lunule, dont on a la quadrature, mais d'une infinité d'autres : car si l'on mene une ordonnée quelconque MP, & du point E, les droites EP, EM coupant l'arc ANB en R, il est clair que le triangle EAP est égal à la portion AMR de la Lunule, & le triangle EPB, égal à l'espace BMR; &c.

DEMONSTRATION.

Soit CG parallele à EM: l'on aura le secteur FER, secteur $DCG :: \overline{EF}^2 . \overline{CD}^2 :: \overline{EB}^2 . \overline{CE}^2 :: 2. 1.$ donc le secteur $FER = 2$ secteur DCG. Soit ensuite tiré CM, l'on aura l'angle $DCM = 2$ angles $DEM =$ (hyp.) $= 2$ angles DCG, d'où s'ensuit que le secteur DCM égalera aussi 2 secteurs DCG. Donc le secteur $FER =$ secteur DCM; & (retranchant FCS de part & d'autre) on aura $SCER = DFSM$, ou bien (ajoutant SMR de part & d'autre) on aura le triangle $MCE = DFRM$. Mais les triangles semblables MOP, EOC, donnent $EO. OM :: CO. OP.$ les triangles COM, & POE se trouvent égaux, on conclura que le triangle CEP est égal au triangle $MCE = DFRM$. Or (Prop. 20.) le triangle $ECA = ADFA$, d'où l'on conclura que le triangle $EPA = AMRA$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXI.

PROBLEME.

35. TROUVER *l'espace renfermé par une parabole.*

FIG. 14. Soit la demi-parabole AMB qui a pour axe AD, on demande l'espace $AMBDA$.

Ayant mené une ordonnée quelconque PM, que j'appelle y, & une autre infiniment proche pm; soit $AD = a$; $BD = b$, $AP = x$, on aura $Pp = dx$, & $y\,dx =$ au petit

parallelogramme pM qui eſt la differentielle de l'eſpace : Mais à cauſe de la parabole $yy = 1x$, prenant le parametre pour l'unité, donc $y = x^{\frac{1}{2}}$, & $y\,dx = x^{\frac{1}{2}}\,dx$, prenant l'intéglale de cette grandeur, on aura $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}xy$ en remettant pour $x^{\frac{1}{2}}$ ſa valeur y, qui eſt la valeur de l'eſpace APM; mais lors que P eſt en D, x devient a, & y devient b, donc $\frac{2}{3}\,x\,y = \frac{2}{3}\,a\,b$ valeur de l'eſpace cherché $AMBDA$.

COROLLAIRE.

36. Il eſt évident que l'eſpace parabolique eſt au parallelogramme circonſcrit comme 2 eſt à 3, & au triangle inſcrit comme 4 à 3.

PROPOSITION XXII.

PROBLEME.

37. TROUVER *l'eſpace renfermé par une hyperbole & ſes aſymptotes, ou ſon rapport avec un rhombe ou un quarré tel que* ABCD. FIG. 13.

Soit la demi-hyperbole AMF, dont les aſymptotes ſont CB, CE, ayant mené une ordonnée quelconque $PM = y$, & une autre pm infiniment proche, on nommera un des côtés du quarré a; CP, x; & Pp, dx; donc $y\,dx =$ au petit parallelogramme Pm differentielle de l'eſpace. Mais à cauſe de l'hyperbole $y = x^{-1}$, donc $y\,dx = x^{-1}\,dx$; dont l'intégrale $= \frac{x^{-1+1}}{0} = \frac{xy}{0}$ en mettant pour y ſa valeur x^{-1}, & P étant en B on aura $\frac{aa}{0}$ pour la valeur de l'eſpace hyperbolique ; ce qui fait connoître que cet eſpace eſt infini par rapport au quarré.

Si l'équation à l'hyperbole eût été $y = x^{-\frac{1}{2}}$, on auroit eu $y\,dx = x^{-\frac{1}{2}}\,dx$, dont l'intégrale $= 2x^{-\frac{1}{2}+1} = 2xy$.

& pour lors l'espace hyperbolique seroit double du quarré.

PROPOSITION XXIII.

PROBLEME.

38. TROUVER *d'une maniere infiniment générale le rapport des espaces tant paraboliques qu'hyperboliques aux parallelogrammes.*

Soit cette équation $y^m = x$, qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini, lors que m marque un nombre positif entier ou rompu, & de toutes les hyperboles, lors qu'il marque un nombre négatif. On aura $y = x^{\frac{1}{m}}$, & $y\,dx = x^{\frac{1}{m}}\,dx$ pour la differentielle de tous ces espaces. Et prenant l'intégrale de cette grandeur, on aura $\frac{m}{m+1} x^{\frac{1}{m}+1} = \frac{m}{m+1} xy$, en mettant y pour sa valeur $x^{\frac{1}{m}}$: Donc en général l'espace parabolique ou hyperbolique est au parallelogramme comme m est à $m+1$, c'est-à-dire comme l'exposant de la puissance est à ce même exposant augmenté de l'unité.

Si $m=2$, on aura $yy = 1x$, qui est à la parabole ordinaire, si $m = -1$, on aura $xy = 1$, qui est à l'hyperbole, & si $m=3$, on aura $y^3 = 1x$ qui exprime la nature d'une des paraboles cubiques; pour lors $y\,dx = x^{\frac{1}{3}}\,dx$, dont l'intégrale $= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} xy$; donc cet espace parabolique est au parallelogramme comme 3 est à 4. &c.

COROLLAIRE.

39. Si l'on prend garde que dans le cas des hyperboles l'exposant m se change en $-m$, l'on aura alors pour la valeur de ces espaces pris en général $\frac{-m}{-m+1} xy = \frac{m}{m-1} xy$: d'où l'on voit que ces espaces seront finis, l'ors que $m > 1$, infinis, lors que $m=1$, & plus qu'infinis* lors que $m < 1$.

* *C'est pour parler le langage ordinaire que je me sers du mot de* plus qu'infini. *Une personne doit nous donner au premier jour un éclaircissement sur cette matiere.*

PROPOSITION XXIV.

PROBLEME.

40. TROUVER *l'espace Elliptique, ou le rapport qu'il a avec le cercle inscrit ou circonscrit.* FIG. 141

Soit l'Ellipse $ABDE$, dont les axes sont AD, BE, & soit du centre C de l'ellipse & du diametre BE décrit le cercle $BNEB$, on demande le rapport de l'espace elliptique au cercle inscrit.

Soit menée une ordonnée quelconque MP au petit axe de l'ellipse, sa partie NP sera l'ordonnée du cercle. Or on démontre dans les Traités des Sections Coniques, que les quarrez des ordonnées de l'ellipse, & les quarrés des ordonnées correspondantes du cercle sont proportionnels aux quarrés des axes de l'ellipse: Mais les quarrés qui sont en proportion géométrique ont aussi leurs racines en proportion géométrique; donc la somme des ordonnées au petit axe de l'ellipse est à la somme des ordonnées du cercle qui a pour diamette cet axe, & par conséquent l'ellipse est au cercle comme le grand axe est au petit; d'où l'on peut tirer cette conclusion, que le cercle est au quarré de son diametre comme l'ellipse est au rectangle de ses deux axes.

Maintenant si on décrit un cercle qui ait pour diametre le grand axe de l'ellipse, on démontrera aussi que l'espace elliptique est au circulaire, comme le petit axe est au grand. Car $\overline{AD}^2 . \overline{BE}^2 :: \overline{NP}^2 . BP \times PE = \overline{MP}^2$ à cause du cercle: Donc $AD . BE :: NP . MP$. donc &c. FIG. 151

Ou bien soit tiré le rayon CM, & du point G ou le rayon coupe le petit cercle AGD soit abaissée la perpendiculaire GF. On aura à cause des triangles semblables CPM, CFG, FG ou PN. (parce que GN parallele à CE, rencontre l'ellipse en N), $PM :: CG . CM$; ou $AC . CE :: AD . BE$: Mais la somme des PN remplit l'espace

C iij

elliptique, & celle des PM remplit l'espace circulaire; donc &c.

COROLLAIRE.

41. Il est évident 1°. Que la quadrature de l'Ellipse suppose la quadrature du cercle. 2°. Que l'ellipse borne un espace qui est moyen proportionnel entre le cercle inscrit & le circonscrit.

PROPOSITION XXV.

PROBLEME.

42. TROUVER *le rapport d'un espace hyperbolique quelconque à l'espace renfermé par une hyperbole équilatere de même hauteur, & qui ait le même axe traversant.*

FIG. 16. Soit une hyperbole MAB qui ait pour axe traversant la ligne Aa, & pour axe conjugué la ligne Dd, & soit une hyperbole équilatere NAE qui ait le même axe traversant Aa. Je dis que l'espace $MABM$ est à l'espace $NAEN$ comme le petit axe Dd est au grand axe Aa. Car par la proprieté de l'hyperbole le quarré d'une ordonnée quelconque à l'axe traversant est au rectangle des parties de cet axe prolongé, comme le quarré de l'axe conjugué est au quarré de l'axe traversant. Ayant donc mené une ordonnée quelconque PM prolongée jusqu'à l'hyperbole équilatere en N, & nommé l'axe Aa, a; le conjugué Dd, b; AP, x; PM, y; PN, z; on aura 1°. $aa.bb :: ax+xx.yy$. 2°. $aa.aa :: ax+xx.zz$. Donc $yy.zz :: bb.aa$; donc $PM(y).PN(z) :: Dd(b).Aa(a)$. Or les PM remplissent l'espace $MABM$, & les PN remplissent l'espace $NAEN$; donc &c.

PROPOSITION XXVI.

PROBLEME.

43. TROUVER *la valeur de l'espace Logarithmique* AMBCE.

Soit la Logarithmique AMB, qui a pour asymptote CE, soit menée une ordonnée quelconque PM, & une autre infiniment proche pm, & du point M soit menée la tangente MT, on demande l'espace $AMPE$ infiniment long du côté où l'asymptote s'approche de la courbe, & borné de l'autre par la courbe, l'ordonnée & l'asymptote. FIG. 17.

Ayant nommé PM, y; Pp, dx; on aura ydx = au petit parallelogramme pM qui est la differentielle ou l'élement de l'espace. Mais par la proprieté de la Logarithmique que la soutangente est toujours constante, c'est-à-dire égale à une droite donnée a; on aura donc $dy . dx :: y . a$, d'où l'on tire $dx = \frac{a\,dy}{y}$, & mettant pour dx cette valeur, on aura $ydx = a\,dy$, dont l'intégrale qui est la somme de tous ces petits parallelogrammes, sera ay valeur de l'espace cherché.

COROLLAIRE.

44. Il évident 1°. que cet espace quoiqu'infiniment long est au triangle MPT fait par l'ordonnée, la soutangente & la tangente menée du même point où l'ordonnée rencontre la courbe, comme 2 est à 1.

2°. Que l'espace compris entre deux ordonnées est égal au rectangle de la soutangente & de la difference de ces mêmes ordonnées : ainsi l'espace $PMRQ = PT \times DM$.

3°. Que les espaces compris entre deux ordonnées sont entr'eux comme les differences de ces ordonnées.

PROPOSITION XXVII.

PROBLEME.

45. TROUVER *l'espace renfermé par une Logarithmique spirale.*

Soit la courbe AMB une Logarithmique spirale qui fait une infinité de retours autour du centre A avant que de parvenir en B, & dont la nature est telle qu'ayant FIG. 18.

mené d'un de ses points quelconques M au centre la ligne MA, & la tangente MT, l'angle AMT soit par tout le même, on demande l'espace renfermé par cette ligne infinie & par le rayon AB.

Ayant nommé AB, a; & mené du centre ou du pole A une ordonnée quelconque $AM = y$, & une autre infiniment proche Am, on décrira du rayon AM le petit arc $MR = dx$, & on aura $\frac{ydx}{2} =$ au petit Secteur MAR; que l'on regarde comme un triangle rectiligne à cause de l'infinie petitesse de l'arc MR, & qui est la differentielle de l'espace. Mais par la propriété de la courbe, l'angle que fait la tangente avec son ordonnée est toûjours le même, ainsi la raison de AM à AT perpendiculaire sur AM, est une raison constante; qu'elle soit par exemple comme m est à n. On aura donc $dy.dx::m.n$; d'où l'on tire $dx = \frac{ndy}{m}$, & mettant cette veleur à la place de dx, on aura $\frac{ydx}{2} = \frac{nydy}{2m}$, dont l'integrale $= \frac{nyy}{4m}$ valeur de l'espace $MOAM$; alors $\frac{nyy}{4m} = \frac{tyy}{4y} = \frac{ty}{4}$. Mais $\frac{ty}{2} =$ le triangle AMT. Donc $\frac{ty}{4} = \frac{1}{2} AMT$; mais lors que le point M se trouve en B, on aura $\frac{naa}{4m}$ valeur de l'espace cherché, parce qu'alors y devient a. Donc l'espace logarithmique est au quarré de AB comme n est à $4m$.

Si l'on nomme la soutangente AT, t; on aura cette proportion $dy.dx::y.t$. D'où l'on voit clairement que l'espace spiral sera égal à la moitié du triangle formé par la tangente, l'ordonnée & la soutangente. Car en quelque endroit que soit le point M, on a toûjous $ydx = tdy$: or la somme des ydx est double de l'espace renfermé par la spirale & par son ordonnée y, & la somme des tdy est égale au triangle fait par la même ordonnée, la tangente & la soutangente; donc &c.

PROP. XXVIII.

PROPOSITION XXVIII.

PROBLEME.

46. TROUVER *l'espace renfermé par une spirale ordinaire.*

Soit une spirale *AKMB*, & un cercle décrit du rayon *AB*. La proprieté de cette courbe est telle qu'ayant mené du centre *A* un rayon quelconque *AN* qui coupe la spirale en *M*, la circonference entiere *BDNdB* est à l'arc *BDN*, comme le rayon *AN* est à la ligne *AM*: on demande l'espace renfermé par la spirale & par le rayon *AB*. FIG. 19.

Soit mené un autre rayon *An* infiniment proche de *AN*, & soit décrit du centre *A* le petit arc *MR*: ayant nommé la circonference entiere du cercle, c; sa partie *BDN*, x; donc $Nn = dx$; le rayon *AN*, r, sa partie *AM*, y; on aura à cause des Secteurs semblables *ANn*, *AMR*: $AN(r).AM(y).Nn(dx)::MR=\frac{ydx}{r}$, & multipliant cette grandeur par $\frac{1}{2}y$, il viendra $\frac{yydx}{2r}$ = au Secteur infiniment petit *MAR* que l'on doit regarder comme la differentielle de l'espace: mais à cause de la spirale $c.x::r.y$, donc $y=\frac{rx}{c}$, & $yy=\frac{rrxx}{cc}$; mettant donc cette valeur à la place de yy, on aura $\frac{yydx}{2r}=\frac{rxxdx}{2cc}$, dont l'integrale $=\frac{rx^3}{6cc}$ valeur de l'espace *AKMA*; ce qui donne l'espace entier $AKMBA=\frac{cr}{6}$, parce qu'alors x se trouve $=c$, & $y=r$. Donc l'espace spiral de la premiere révolution est au cercle circonscrit, comme 1 est à 3.

PROPOSITION XXIX.

PROBLEME.

47. TROUVER *généralement la valeur de cet espace* FIG. 19. *spiral, quel que soit le degré de la puissance de la circonférence & celui du rayon.*

Les mêmes choses étant posées que dans l'*article précédent*, on aura $\frac{yydx}{2r}$ = à la differentielle MAR de l'espace $AKMA$. Mais par la proprieté de la spirale, nommant n le degré de la puissance de la circonference, & m celui du rayon, on aura $c^n . x^n :: r^m . y^m$, d'où l'on tire $y = \frac{rx^{\frac{n}{m}}}{c^{\frac{n}{m}}}$ & $yy = \frac{rrx^{\frac{2n}{m}}}{c^{\frac{2n}{m}}}$, & mettant cette valeur à la place de yy, il viendra $\frac{yydx}{2r} = \frac{rx^{\frac{2n}{m}}}{2c^{\frac{2n}{m}}}dx$, dont l'integrale $= \frac{mrx^{\frac{2n}{m}+1}}{4n+2m \times c^{\frac{2n}{m}}}$ valeur de l'espace $AKMA$, d'où l'on tire $\frac{m}{2m+4n}cr$ = à l'espace entier que l'on demandoit. D'où l'on doit conclure en général, que l'espace spiral est au cercle circonscrit, comme m est à $m + 2n$; c'est-à-dire, que cet espace est au cercle comme l'exposant du rayon est au même exposant du rayon plus le double de l'exposant de la circonférence.

Si $m = 1$, $n = 1$, il est évident que la spirale sera celle d'Archimede. Si $m = 2$, & $n = 3$, c'est-à-dire, que la spirale se décrive par un mouvement accéleré qui se fasse selon la raison des quarrez sur le rayon, & selon la raison des cubes sur la circonférence, alors l'espace spiral sera au cercle comme 1 est à 4.

De là il est facile de résoudre ce problême. Trouver un espace spiral qui soit au cercle, ou une portion qui soit au Secteur correspondant en raison donnée.

Soit la raiſon donnée de p à q. On aura $q.p::m+2n.m$; donc $q-p.p::2n.m$; & $\frac{q-p}{2}.p::n.m$. D'où il eſt évident que prenant p pour l'expoſant du rayon, il faut prendre $\frac{q-p}{2}$ pour celui de la circonference.

AUTRE MANIERE.

48. SOIT d'un point quelconque P pris ſur le rayon AB décrit du centre A l'arc de cercle POM, & un autre infiniment proche pom, qui rencontrent la ſpirale en M & m, il eſt évident que les eſpaces infiniment petits renfermez par ces arcs ſont les élemens de l'eſpace exterieur $BDNdBMKAB$ borné par le cercle & par la ſpirale. Nommant donc comme auparavant la circonférence entiére, c; ſa partie BDN, x; AP, y; donc $Pp=dy$; on aura $AB\ (r).\ AP\ (y)::\ BDN\ (x).\ POM=\frac{xy}{r}=$ la portion de circonférence décrite du point P, & multipliant par dy, on aura $\frac{xydy}{r}=$ à la differentielle de l'eſpace. Mais par la nature de la ſpirale $c^n.x^n::r^m.y^m$; d'où l'on tire $x=\frac{cy^{\frac{m}{n}}}{r^{\frac{m}{n}}}$, & mettant pour x cette valeur dans $\frac{xydy}{r}$, il viendra $\frac{cy^{\frac{m}{n}+1}}{r^{\frac{m}{n}+1}}dy$, dont l'intégrale $=\frac{ncy^{\frac{m}{n}+2}}{\overline{m+2n}\times r^{\frac{m}{n}+1}}$ valeur de l'eſpace $POMKAP$, ce qui donne $\frac{n}{m+2n}cr$ pour celle de l'eſpace entier, parce que x devenant $=c$, $y=r$. Donc cet eſpace eſt au cercle comme $2n$ eſt à $m+2n$; d'où l'on tirera les mêmes concluſions que dans l'article précédent: car ſi $m=1$, & $n=1$, on aura $\frac{1}{3}cr$ pour cet eſpace; donc cet eſpace eſt au cercle comme 2 eſt à 3, donc l'eſpace intérieur ſera au cercle comme 1 eſt à 3.

FIG. 19.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME.

FIG. 20. 49. TROUVER *l'espace renfermé par une spirale* AKMB *dont la propriété est telle qu'ayant décrit un cercle du rayon* AB, *& mené du centre* A *un autre rayon quelconque* AN *coupant la spirale en* M, *la puissance* n *de la circonférence entiére* BdNDB *est à une pareille puissance de l'arc* BdN, *comme la puissance* m *du rayon* AN *est à une pareille puissance de sa partie* MN *terminée par la spirale & par la circonférence.*

Les mêmes choses étant posées, & ayant nommé BdN, x; NM ou BP, y; donc $AM = r - y$, on aura $AN(r) . AM(r-y) :: Nn(dx) . MR = \frac{rdx - ydx}{r}$, & multipliant par $\frac{r-y}{2}$, il viendra $\frac{rrdx - 2rydx + yydx}{2r} =$ au Secteur infiniment petit MAR : Mais à cause de la spirale $x = \frac{cy^{\frac{m}{n}}}{r^{\frac{m}{n}}}$, prenant la différence de cette équation, on aura $dx = \frac{mcy^{\frac{m}{n}-1}dy}{nr^{\frac{m}{n}}}$, & mettant cette valeur à la place de dx, on aura $\frac{rrdx - 2rydx + yydx}{2r} = \frac{mcy^{\frac{m}{n}-1}dy}{2nr^{\frac{m}{n}-1}} - \frac{mcy^{\frac{m}{n}}dy}{nr^{\frac{m}{n}}} + \frac{mcy^{\frac{m}{n}+}dy}{2nr^{\frac{m}{n}+1}}$, dont l'intégrale $= \frac{cy^{\frac{m}{n}}}{2r^{\frac{m}{n}-1}} - \frac{mcy^{\frac{m}{n}+1}}{m+nr^{\frac{m}{n}}} + \frac{mcy^{\frac{m}{n}+2}}{2m+4nr^{\frac{m}{n}+1}}$ valeur de l'espace $BmMAB$, ce qui donne $\frac{cr}{2} - \frac{m}{m+n}cr + \frac{m}{2m+4n}cr$ pour celle de l'espace entier, parce qu'alors $y = r$. Et donnant à tout un commun dénominateur, on aura enfin $\frac{nn}{mm+3mn+nn}cr =$ à l'espace cherché. Ce qu'il falloit trouver.

Si l'on prenoit au lieu de la valeur de dx, celle de y, on auroit 1°. $y = \frac{rx^{\frac{n}{m}}}{c^{\frac{n}{m}}}$, 2°. $yy = \frac{rrx^{\frac{2n}{m}}}{c^{\frac{2n}{m}}}$, & mettant ces valeurs dans $\frac{rrdx - 2rydx + yydx}{2r}$ on trouveroit $\frac{rdx}{2} - \frac{rx^{\frac{n}{m}}}{c^{\frac{n}{m}}}dx + \frac{rx^{\frac{2n}{m}}}{2c^{\frac{2n}{m}}}dx$, dont l'intégrale $= \frac{rx}{2} - \frac{mrx^{\frac{n}{m}+1}}{\overline{n+m}\,c^{\frac{n}{m}}} + \frac{mrx^{\frac{2n}{m}+1}}{\overline{4n+2m}\,c^{\frac{2n}{m}}}$ sera la valeur de l'espace partial, & $\frac{cr}{2} - \frac{m}{n+m}cr + \frac{m}{4n+2m}cr$ sera celle de l'espace entier, parce que y devenant r, x devient c, & donnant un commun dénominateur, on aura comme auparavant $\frac{nn}{mm+3mn+2nn}cr$. Donc cet espace est au cercle comme $2nn$ est à $mm+3mn+2nn$.

AUTRE MANIERE.

50. Les mêmes choses étant posées que dans *l'art* 48. on aura $AB\,(r)$. $AP\,(r-y) :: BdN\,(x)$. $PM = \frac{rx - xy}{r}$, & multipliant par dy, on aura $\frac{rxdy - xydy}{r}$ = à la différentielle $PpmM$ de l'espace. Mais $x = \frac{cy^{\frac{m}{n}}}{r^{\frac{m}{n}}}$, donc $\frac{rxdy - xydy}{r} = \frac{cy^{\frac{m}{n}}dy}{r^{\frac{m}{n}}} - \frac{cy^{\frac{m}{n}+1}dy}{r^{\frac{m}{n}+1}}$, dont l'intégrale $\frac{ncy^{\frac{m}{n}+1}}{\overline{n+m}\,r^{\frac{m}{n}}} - \frac{ncy^{\frac{m}{n}+2}}{\overline{m+2n}\,r^{\frac{m}{n}+1}}$ sera la valeur de l'espace partiale $BmMRPB$, & $\frac{n}{m+n}cr - \frac{n}{m+2n}cr$ sera celle du total $BmMKAB$ qui devient comme auparavant $= \frac{nn}{mm+3mn+2nn}cr$ en donnant un commun dénominateur ; donc &c. FIG. 10[illegible]

PROPOSITION XXXI.

PROBLEME.

FIG. 21. 41. SOIT *une ligne courbe* AMB *telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques* M *l'ordonnée* MP *perpendiculaire sur l'axe* AB, *& une autre infiniment proche* mp, *& nommé* AB, a; AP, x; *donc* Pp $=$ dx; *&* PB $=$ a $-$ x; PM, y; *on ait toujours cette proportion* $a^m . x^m :: \overline{a-x}^n . y^n$. *On demande la valeur de l'espace* AMBA.

L'équation à la courbe sera $y = \frac{\overline{a-x} \times x^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}}$ & multipliant de part & d'autre par dx, on aura $y\,dx = \frac{\overline{a-x} \times x^{\frac{m}{n}}\,dx}{a^{\frac{m}{n}}}$ pour la différentielle de l'espace, dont l'intégrale $= \frac{nax^{\frac{m}{n}+1}}{\overline{m+n}\,a^{\frac{m}{n}}} - \frac{nx^{\frac{m}{n}+2}}{\overline{m+2n}\,a^{\frac{m}{n}}}$ sera la valeur de l'espace *AMPA*, ce qui donnera $\frac{nn}{mm+3mn+2nn}\,aa$ pour celle du total *AMBA*; parce que *AP* devenant *AB*, x devient a. D'où l'on tirera cette conclusion, que cet espace est au quarré fait sur l'axe *AB*, comme nn est à $mm+3mn+2nn$.

Si $m=2$ & $n=1$, l'équation sera $y = \frac{axx - x^3}{aa}$, & on trouvera $\frac{1}{12}\,aa$ pour l'espace renfermé par la courbe.

Maintenant soit prolongée *PM* jusqu'en *N*, en sorte qu'ayant nommé *PN*, z; on ait cette proportion $a.z :: \overline{a-x}.y$; & qu'on décrive une courbe dont la nature soit exprimée par cette équation $ay = \overline{a-x} \times z$, on demande l'espace renfermé par cette courbe, & le rapport qu'il a avec l'espace renfermé par la courbe *AMB*.

A cause de la courbe *AND*, on a $y = \frac{a-x}{a} \times z$, mais

par l'équation cy-dessus, on a trouvé $y = \frac{\overline{a-x}}{a^{\frac{m}{n}}} \times x^{\frac{m}{n}}$, donc $\frac{\overline{a-x}}{a} \times z = \frac{\overline{a-x}}{a^{\frac{m}{n}}} \times x^{\frac{m}{n}}$, d'où l'on tire $z = \frac{x^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}-1}}$ ou $z^n = a^{n-m} x^m$, qui est une équation qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini. Ainsi * l'espace *ANDBA* sera au quarré de *AB* comme n est à $m+n$. Donc l'espace parabolique est à l'espace renfermé par la courbe *AMB* comme $mm + 3mn + 2nn$ est à $mn + nn$, ou comme $m + 2n$ est à n. * Art. 38.

Il est évident que si dans l'équation à la parabole m est plus grande que n, on aura $x^m = \frac{a^m z^n}{a^n}$, & qu'ainsi elle aura pour axe la ligne *AE*, & pour sommet le point *A*; mais que si m est plus petit que n, on aura $z^n = \frac{a^n x^m}{a^m}$, & que la parabole aura pour axe la ligne *AB*, & pour sommet le même point *A*.

Soit encore prolongée de l'autre côté l'ordonnée *PM* jusqu'en *Q*, en sorte qu'ayant nommé *PQ*, z; on ait $a . x :: y . z$; & que par tous ces points ainsi trouvez on fasse passer la courbe *AQB*, on demande la valeur de l'espace qu'elle renferme.

A cause de la courbe *AQB*, on aura $y = \frac{az}{x}$, ou $y^n = \frac{a^n z^n}{x^n}$ :: Mais à cause de la courbe *AMB*, $y^n = \frac{\overline{a-x}^n \times x^m}{a^m}$; donc $\frac{a^n z^n}{x^n} = \frac{\overline{a-x}^n \times x^m}{a^m}$, donc $a^{m+n} z^n = \overline{a-x}^n \times x^{m+n}$, d'où l'on tire cette proportion $a^{m+n} . x^{m+n} :: \overline{a-x}^n . z^n$. ce qui fait connoître que cette courbe est de la même nature que *AMB*,

Pour avoir l'espace renfermé par cette courbe ou le rapport qu'il a avec celui de la courbe *AMB*, on prendra la valeur de z qu'on trouve égale à $\frac{\overline{a-x} \times x^{\frac{m+n}{n}}}{a^{\frac{m+n}{n}}}$, & multi-

pliant par dx, on aura $z\,dx = \frac{a x^{\frac{m+n}{n}} dx - x^{\frac{m+n}{n}} dx}{a^{\frac{m+n}{n}}}$ = à la différentielle de l'espace, dont l'intégrale $= \frac{n a x^{\frac{m+n}{n}+1}}{\overline{m+2n}\, a^{\frac{m+n}{n}}} - \frac{n x^{\frac{m+n}{n}+2}}{\overline{m+3n}\, a^{\frac{m+n}{n}}}$ valeur de l'espace APQ, ce qui donne $\frac{n}{m+2n} aa - \frac{n}{m+3n} aa = \frac{nn}{mm+5mn+6nn} aa$ valeur de l'espace entier $AQBA$, parce que x devient $= a$. Donc cet espace est à celui de la courbe AMB, comme $mm + 3mn + 2nn$ est à $mm + 5mn + 6nn$, ou comme $m + n$ est à $m + 3n$. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION XXXII.

PROBLEME.

52. TROUVER *l'espace renfermé par une spirale parabolique.* FIG. 22.

Soit la portion du cercle AMB qui a pour rayon la ligne AC, & soit la courbe AND dont la nature est telle qu'ayant mené d'un point quelconque M de l'arc de cercle, le rayon MC coupant la courbe en N, on ait toujours cette proportion ; l'arc AM est à la ligne MN, comme cette même ligne MN est à une droite donnée a ; on demande l'espace renfermé par cette courbe, le rayon AC, & par l'ordonnée CN.

Ayant nommé le rayon CA ou CM, r ; sa partie CN, y ; donc $MN = r - y$; & l'arc AM, x ; soit mené un autre rayon Cm infiniment proche de CM, & soit décrit du point C le petit arc NR : On aura par la propriété de la courbe $ax = rr - 2ry + yy$, & (en prenant les différences) $dx = \frac{2ydy - 2rdy}{a} = Mm$: Mais à cause des Secteurs semblables CMm, CNR, on fera $CM(r) . CN(y) :: Mm\left(\frac{2ydy - 2rdy}{a}\right) . NR = \frac{2yydy - 2rydy}{ar}$, & multipliant

pliant cette valeur par $\frac{1}{2}y$, on aura $\frac{y^3dy - rrydy}{ar}$ = au petit Secteur CNR, qui est la différentielle de l'espace, dont l'intégrale $= \frac{y^3}{4ar} - \frac{y^4}{3a}$, est la valeur de l'espace cherché ACN.

On trouvera pour le triligne MAN, $\frac{ryy}{2a} - \frac{y^4}{4ar} - \frac{rry}{a} + \frac{y^3}{3a}$. Car $Mm + NR = \frac{rdx + ydx}{r}$, laquelle grandeur étant multipliée par $\frac{r-y}{2}$ donne $\frac{rrdx - yydx}{2r}$ = au trapeze infiniment petit $MR = \frac{rrydy - y^3dy - r^3dy + ryydy}{2ar}$ en mettant pour dx sa valeur $\frac{2ydy - 2rdy}{a}$; dont l'intégrale vaut le triligne MAN.

Lorsque y devient r, on a pour l'espace spiral $\frac{r^3}{12a}$, & pour l'espace borné par le cercle & la courbe $\frac{5r^3}{12a}$. Mais si l'on prend pour le parametre de la courbe une troisiéme proportionnelle à l'axe ou à la circonférence du cercle $=c$, & au rayon $=r$, on aura pour le premier espace $\frac{cr}{12}$, qui sera au cercle comme 1 est à 6; & pour le second $\frac{5cr}{12}$, qui sera au cercle comme 5 est à 6.

PROPOSITION XXXIII.

PROBLEME.

53. TROUVER *l'espace renfermé par une Cycloïde.*

Soit la demi-cycloïde ANF formée par le roulement du demi-cercle AMB le long de BF, & qui a pour diametre AB, on demande la valeur de l'espace $ANFBA$. FIG. 23.

Soit menée d'un point quelconque P l'ordonnée au cercle PM prolongée jusqu'à la roulette en N, & une autre infiniment proche pn, soit du point M menée MR, & du point N, NQ paralleles à AB, & soit achevé le parallelogramme $ABFE$. On nommera ensuite AB, $2r$; la demi-circonference $AMB = BF$, $\frac{1}{2}c$; AP, x; donc Pp ou

MR ou $NQ = dx$; PM, y; donc $Rm = dy$, & $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Pour trouver maintenant l'eſpace cycloïdal, on cherchera l'eſpace extérieur $ANFEA$ en cette ſorte. On menera des points Q & n les lignes QG, nH paralleles à AB, & on cherchera la valeur de Qn ou GH, qui eſt égale à $Rm + Mm$; ce que l'on prouve ainſi.

Ayant mené NK parallele à Mm, que l'on regarde comme une ligne droite à cauſe de ſon infinie petiteſſe, on aura les deux triangles MRm & NQK, qui ſeront ſemblables & égaux, donc $Rm = QK$; reſte donc à prouver que $Kn = Mm$; ce qui eſt évident, car $Kn = mn - MN$; mais $mn = Am$, & $MN = AM$; donc $Kn = Am - AM = Mm$. On aura donc en termes analytiques $Qn = dy + \frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}}$. Car à cauſe des triangles ſemblables $CPM, MRm, PM, (y = \sqrt{2rx - xx}.) CM (y) :: RM (dx). Mm = \frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}}$. Mais à cauſe du cercle $yy = 2rx - xx$, donc en prenant la différence, $dy = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{2rx - xx}}$, donc $Qn = Rm + Mm = \frac{2rdx - xdx}{\sqrt{2rx - xx}}$, & multipliant cette grandeur par $GN = x$, on aura $\frac{2rxdx - xxdx}{\sqrt{2rx - xx}} = dx\sqrt{2rx - xx}$ pour la différentielle de l'eſpace $ANFEA$; mais cette différentielle eſt la même que celle du demi cercle AMB, donc l'eſpace $ANFEA$ vaut ce demi-cercle.

COROLLAIRE.

54. Il eſt évident que l'eſpace cycloïdal intérieur eſt triple de ſon demi-cercle générateur : Car ce demi-cercle $= \frac{cr}{4}$, & le parallelogramme $BE = cr$; mais l'eſpace $ANFEA = \frac{cr}{4}$, donc &c. D'où l'on voit que l'eſpace cycloïdal entier eſt triple de ſon cercle générateur.

Si on double toutes les ordonnées PM, & qu'on faſſe

passer par l'extremité de toutes ces lignes une courbe qui sera une espece d'ellipse, on divisera par ce moyen l'espace cycloïdal $ANFBA$ en trois espaces égaux entr'eux ; puisqu'il est évident que l'espace renfermé par le cercle générateur & par l'ellipse sera égal au cercle.

Si du point A on mene la ligne AF, l'espace compris par la cycloïde ANF & par la droite AF est égal au demi-cercle générateur. Car le triangle ABF est double de ce demi-cercle.

PROPOSITION XXXIV.

PROBLEME.

55. TROUVER *la valeur de l'espace Cissoïdal.*

Soit la Cissoïde ANE qui a pour asymptote BF, & soit le demi-cercle générateur AMB, on demande l'espace compris entre le diametre AB de ce cercle, l'asymptote BF, & la cissoïde ANE. FIG. 24.

Soit menée l'ordonnée PM coupant la cissoïde en N, & une autre infiniment proche pm, soit nommée AB, $2r$; AP, x, donc $PB = 2r - x$, & $Pp = dx$; PM, y.

La propriété de la Cissoïde est telle que $\div BP.PM : : AP.PN$; donc $PM(y).\ AP(x) :: AP(x).\ PN = \frac{xx}{y}$, & multipliant par dx, & mettant pour y sa valeur $\sqrt{2rx - xx}$ à cause du cercle, on aura $\frac{xxdx}{\sqrt{2rx - xx}}$ pour la la valeur du petit quadrilatere $PNnp$ qui est la différentielle de l'espace; mais $\frac{xxdx}{\sqrt{2rx - xx}} = \frac{2rxdx}{\sqrt{2rx - xx}} - dx\sqrt{2rx - xx}$. Or il est visible que l'intégrale du dernier membre est égale au demi-segment $AOMPA$, & celle du premier est quadruple du segment $AOMA$, ce que je prouve ainsi.

Ayant mené du point A dans le demi-cercle AMB la sécante AM, & une autre infiniment proche Am, on décrira du centre A le petit arc MR. On aura à cause du cercle $AM = \sqrt{2rx}$, donc $Rm = \frac{rdx}{\sqrt{2rx}}$. Mais à cause

des triangles semblables AMP, MRm, (car ils sont rectangles en P & en R, & les angles PMA & RmM sont égaux ayant chacun pour mesure un arc égal à la moitié de l'arc AM). $PM(\sqrt{2rx-xx}$. $AP(x)::Rm(\frac{rdx}{\sqrt{2rx}})$. $MR=\frac{rxdx}{\sqrt{2rx}\times\sqrt{2rx-xx}}$, & multipliant par $\frac{1}{2}AM=\frac{\sqrt{2rx}}{x}$, on aura $\frac{rxdx}{2\sqrt{2rx-xx}}$ valeur du petit Secteur MAR; dont l'intégrale = le segment $AOMA$; donc $\frac{2rxdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ est quadruple de ce segment; ce qu'il falloit prouver.

Il est évident que l'espace Cissoïdal est triple de son demi-cercle générateur. Ainsi il est facile de trouver un espace cissoïdal égal à celui de la Cycloïde, ou en telle raison qu'on voudra.

PROPOSITION XXXV.

PROBLEME.

56. TROUVER *l'espace renfermé par une Conchoïde & son asymptote.*

FIG. 23. Soit du pole C & de l'asymptote DE décrite la demi-conchoïde AMB, dont la nature est telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M au pole C la ligne MC coupant l'asymptote en N, le rectangle de CN par NM soit toujours égal au rectangle de CD par DA, on demande l'espace Conchoïdal $BMADE$.

Soient nommées CD, a; DA, b; CN, x; NM, y; soit menée une autre ligne Cm infiniment proche de CM, & soient du point C décrits les petits arcs NQ, MR que l'on regarde comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse; donc $Qn=dx$. On aura donc par la propriété de la courbe $xy=ab$, d'où l'on tire $MN(y)=\frac{ab}{x}$, & $CM=\frac{ab+xx}{x}$. Mais à cause des triangles semblables CDN, NQn, $ND(\sqrt{xx-aa})$. $CD(a)::nQ(dx)$.

$QN = \frac{adx}{\sqrt{xx - aa}}$. Et à cause des Secteurs semblables CNQ, CMR, $CN (x) . CM \left(\frac{ab + xx}{x}\right) :: NQ \left(\frac{adx}{\sqrt{xx - aa}}\right)$; $MR = \frac{axxdx + aabdx}{xx\sqrt{xx - aa}}$, & multipliant cette grandeur par $\frac{xx + ab}{2x}$ $\left(\frac{CM}{2}\right)$ on aura $\frac{ax^4 dx + 2aabxxdx + a^3 bbdx}{2x^3 \sqrt{xx - aa}}$ $= \frac{axdx}{2\sqrt{xx - aa}} + \frac{aabdx}{x\sqrt{xx - aa}} + \frac{a^3 bbdx}{2x^3 \sqrt{xx - aa}}$ valeur du Secteur infiniment petit CMR qui est la différentielle de l'espace CAM. Mais il est évident que le premier membre $\frac{axdx}{2\sqrt{xx - aa}}$ est égal à la différentielle de l'espace CDN, si donc on trouve l'intégrale des deux autres membres $\frac{aabdx}{x\sqrt{xx - aa}}$ & $\frac{a^3 bbdx}{2x^3 \sqrt{xx - aa}}$, qui valent le petit trapeze $MRQN$, on aura l'espace cherché $NDMA$.

Pour cela soit décrit le quart de cercle CAB; ayant pris sur le rayon $CB = a$, la partie $CP = \frac{aa}{x}$, & mené par le point P l'ordonnée PM, & une autre infiniment proche pm; on aura par la proprieté du cercle $MP = \frac{a}{x}\sqrt{xx - aa}$. Or en prenant les différentielles de CP & de PM, on trouve $Pp = -\frac{aadx}{xx}$, & MR ou $Qq = \frac{a^3 dx}{xx\sqrt{xx - aa}}$; donc $\frac{CA \times Pp}{MP}$ c'est à dire le petit arc $Mm = -\frac{aadx}{x\sqrt{xx - aa}}$, dont l'intégrale vaut l'arc BM; où l'on doit remarquer que le signe $-$ fait voir que x diminuant, $\frac{aa}{x}$ augmente, & qu'il faut prendre pour l'intégrale l'arc BM & non pas l'arc AM, parce qu'il s'agit ici d'avoir l'intégrale de toutes les différentielles $\frac{aabdx}{x\sqrt{xx - aa}}$ à commencer depuis la valeur de CN (*Fig.* 25.) jusqu'à celle de CD. D'où il est évident que si l'on multiplie l'arc BM par la donnée b, on aura l'intégrale cherchée du membre $\frac{aabdx}{x\sqrt{xx - aa}}$. FIG. 26.

Maintenant le petit espace $MQqm$ ou $MQ \times Qq =$ FIG. 27.

$\frac{a^3 dx}{x^3 \sqrt{xx-aa}}$, & par conſequent ſon intégrale ſera égale à ſegment de cercle $CQMB$. Multipliant donc ce ſegment par bb & le diviſant par $2aa$, on aura l'intégrale de $\frac{a^3 bbdx}{2x^3 \sqrt{xx-aa}}$ qui répond à toutes les valeurs de x depuis CN juſqu'à CD. L'eſpace Conchoïdal $ADNM$ eſt donc égal à l'arc circulaire BM multiplié par la donnée DA (b), & au ſegment de cercle $CQMB$ multipliée par bb & diviſé par $2aa$; ce qu'il falloit trouver.

57. SI $MN = AD$, pour lors la Conchoïde ſera celle de Nicomede, & on aura en nommant CN, x; CM, $= a + x$; & en faiſant les mêmes raiſonnemens, $-\frac{a^3 dx}{2x\sqrt{xx-aa}} + \frac{aadx}{\sqrt{xx-aa}} + \frac{axdx}{2\sqrt{xx-aa}}$ valeur du petit Secteur MCR, dont le dernier membre eſt égal au petit Secteur CNQ.

Maintenant pour trouver l'intégrale de $\frac{a^3 dx}{2x\sqrt{xx-aa}}$ on décrira un quart de cercle GHI, & on prendra ſur ſon rayon $GI = a$, la partie $GE = \frac{aa}{x}$, puis ayant mené le rayon GF, & un autre infiniment proche Gf, & les ordonnées FE, fe, on aura $FE = \frac{a}{x}\sqrt{xx-aa}$, & Ee ou $Kf = -\frac{aadx}{xx}$. Mais à cauſe des triangles ſemblables GEF, FKf, $EF\left(\frac{a}{x}\sqrt{xx-aa}\right) . GF(a) :: Kf\left(-\frac{aadx}{xx}\right)$. $Ff = -\frac{aadx}{x\sqrt{xx-aa}}$, & multipliant par $\frac{1}{2}a$, on aura $-\frac{a^3 dx}{2x\sqrt{xx-aa}}$ pour la valeur du petit Secteur FGf, dont l'intégrale eſt égale au Secteur GFI à cauſe du ſigne négatif. Ce qu'il falloit trouver en premier lieu.

FIG. 28. Pour trouver l'intégrale de l'autre membre $\frac{aadx}{\sqrt{xx-aa}}$ il faut décrire une hyperbole équilatere AMB, dont le centre eſt C, & le demi-axe $CA = a$, & menant deux ordonnées PM, pm infiniment proches, & du point C ti-

rant deux lignes CM, Cm, je dis que le petit triangle MCm est égal à la différentielle $\frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$, dont l'intégrale $=$ l'espace ACM; Ainsi le double de cet espace sera l'intégrale cherchée de $\frac{aadx}{\sqrt{xx-aa}}$.

Pour le prouver soit $CP=x$, $PM=y$, on aura à cause de l'hyperbole $yy=xx-aa$, & prenant les différences, $dy=\frac{xdx}{\sqrt{xx-aa}}$: Donc $\overline{Mm}^2\ (dx^2+dy^2)=\frac{2xxdx^2-aadx^2}{xx-aa}$. Mais $CM=\sqrt{2xx-aa}$, dont la différence $rm=\frac{2xdx}{\sqrt{2xx-aa}}$. On aura donc $\overline{Mm}^2-\overline{rm}^2$ $(\overline{Mr}^2)=\frac{2xxdx^2-aadx^2}{xx-aa}-\frac{4xxdx^2}{2xx-aa}=\frac{a^4dx^2}{\overline{2xx-aa}\times\overline{xx-aa}}$ en donnant un commun dénominateur; donc $Mr=\frac{aadx}{\sqrt{2xx-aa}\times\sqrt{xx-aa}}$, & multipliant cette grandeur par $\frac{1}{2}$ $CM=\frac{1}{2}\sqrt{2xx-aa}$, on aura $\frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$ valeur du petit triangle MCm, dont l'intégrale est égale à l'espace ACM. Donc &c.

Il est donc évident que l'espace Conchoïdal quoi qu'infiniment étendu est d'une grandeur finie, ce qui est digne de remarque, Il en faut dire autant de l'espace Cissoïdal dont on a déterminé la valeur dans le problême précédent.

SECTION SECONDE.

DE LA DIMENSION DES SOLIDES.

QUOIQU'IL y ait plusieurs manieres de concevoir la formation des Solides, on n'en considérera qu'une qui paroît la plus simple & la plus facile, & qui se fait par le mouvement uniforme d'un plan quelconque autour d'une ligne que l'on regarde comme l'axe de la figure. Par exemple, si on conçoit qu'un parallelogramme rectangle se meuve autour d'un de ses côtez pris comme axe, & qu'il fasse une révolution entiere, il formera par ce mouvemenr un cylindre. Il en est de même des autres surfaces.

Il est évident que toutes les perpendiculaires à cet axe décrivent dans ce mouvement des cercles ou des portions de cercles si la révolution n'est pas entiere.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

58. TROUVER *la valeur d'un prisme.*

FIG. 6. Soit un prisme polygone dont la hauteur $AB = a$, sa partie $AP = x$, & $Pp = dx$. Il est clair que si on coupe ce solide par un plan parallele à la base, passant par le point P, la section sera un polygone semblable & égal à celui de la base, & qu'il y a autant de ces surfaces polygones qu'il y a de parties dans la hauteur AB. Et nommant la somme des côtez de la base c; & la hauteur d'un des triangles b, on aura $\frac{bc}{2} =$ au polygone de la section & multipliant

multipliant par dx, il viendra $\frac{bcdx}{2}$ = au petit fragment qui a pour hauteur Pp, & qui est la différentielle du Solide, dont l'intégrale = $\frac{bcx}{2}$ est la valeur de la partie du prisme qui a pour hauteur AP, ce qui donne $\frac{abc}{2}$ pour celle du prisme entier, parce qu'en B, x devient = a.

Si le prisme n'avoit pas pour base un polygone régulier, on feroit à peu près les mêmes raisonnemens.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

59. TROUVER *la valeur d'une pyramide.*

Soit une pyramide polygone dont la hauteur $AB = a$, sa partie $AP = x$, & $Pp = dx$, soit mené du point B le rayon $BD = r$, & du point P le rayon $PM = y$; il est évident que si on coupe cette pyramide par un plan parallele à la base passant par le point P, la section sera un polygone semblable à celui de la base : Et nommant c, la somme des côtez de la base, & b la hauteur d'un des triangles, on aura $\frac{bc}{2}$ = au polygone de la base ; & pour avoir celui de la section on raisonnera ainsi. Les polygones semblables sont entr'eux en raison doublée de leurs rayons, ainsi la base est à la section comme rr est à yy : mais $rr . yy :: aa . xx$; donc $aa . xx :: \frac{bc}{2} . \frac{bcxx}{2aa}$ = au polygone qui a pour rayon PM, & multipliant par dx, on aura $\frac{bcxxdx}{2aa}$ = au petit fragment qui a pour hauteur Pp, & qui est la différentielle de la pyramide, dont l'intégrale = $\frac{bcx^3}{6aa}$ est la valeur de la pyramide qui a pour hauteur AP, ce qui donne $\frac{abc}{6}$ pour celle de la pyramide entiere, parce qu'en B, x devient = a. FIG. 31

Il seroit facile de trouver par là la valeur d'un fragment quelconque coupé par un plan ou par deux plans paralleles à la base.

Si la pyramide n'avoit pas pour base un polygone régulier, on feroit à peu près les mêmes raisonnemens; car les polygones semblables sont entr'eux en raison doublée de leurs côtez homologues, ou bien les différentielles ou les élemens de la pyramide décroissent en raison doublée des hauteurs.

COROLLAIRE.

60. Il est évident que la pyramide est au prisme de même base & de même hauteur comme 1 est à 3.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

61. TROUVER *la valeur d'un cylindre.*

Soit un cylindre formé par la révolution du parallélogramme $ABCD$, dont la hauteur $=a$, la circonférence de la base $=c$, & le rayon $=r$, on aura * $\frac{rc}{2}=$ au cercle de la base : Or comme le cylindre est composé d'autant de ces cercles qu'il y a de parties dans sa hauteur, si on multiplie $\frac{cr}{2}$ par a, on aura $\frac{acr}{2}=$ au cylindre cherché.

FIG. 8.

* Art. 2.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

62. TROUVER *la valeur d'un cone.*

Soit le cone formé par la révolution du triangle rectangle ADB autour de AD, soient menées les perpendiculaires MP, mp, il est clair qu'elles décriront en tournant des cercles, dont la somme sera la valeur du cone.

FIG. 9.

Soit $AD=a$, $BD=r$, la circonférence de la base $=c$, $PM=y$, $AP=x$; donc $Pp=dx$: on aura $\frac{cr}{2}=$ au cercle de la base; & pour avoir celui qui est décrit par PM, on dira $r.\ c::y.\ \frac{cy}{r}$ valeur de la circonférence,

donc $\frac{cyy}{2r}$ = au cercle, & $\frac{cyydx}{2r}$ = à la différentielle du cone: Mais à cause des triangles semblables *APM, ADB*. on aura $x . y :: a . r$, donc $x = \frac{ay}{r}$, & $dx = \frac{ady}{r}$, & mettant cette valeur à la place de dx, on aura $\frac{cyydx}{2r} = \frac{acyydy}{2rr}$, dont l'intégrale $= \frac{acy^3}{6rr}$ valeur de la partie du cone décrite par *APM*, & $\frac{acr}{6}$ valeur du cone entier, parce que *P* étant en *D*, *y* devient *r*.

COROLLAIRE.

63. Il est évident que le cone est au cylindre de même base & de même hauteur comme 1 est à 3.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

64. TROUVER *un cylindre égal à un cone donné.*

Soit le cone donné $= \frac{acr}{6}$, soit prise pour la hauteur du cylindre une grandeur quelconque *b*, & soit nommé le rayon de sa base, *x*; on dira $r . c :: x . \frac{cx}{r}$; donc le cercle de sa base $= \frac{cxx}{2r}$, donc le cylindre $= \frac{bcxx}{2r} = \frac{acr}{r}$ par la supposition, d'où l'on tire $x = \sqrt{\frac{arr}{3b}}$ valeur du rayon cherché de la base du cylindre; Donc &c.

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

65. TROUVER *un cone égal à un cylindre donné.*

Soit le cylindre donné $= \frac{bcr}{2}$, & soit la hauteur du cone $= a$, le rayon de sa base $= x$, donc le cone $=$ * $\frac{acxx}{6r} = \frac{bcr}{2}$

* *Art.* 62.

par l'hypothese; d'où l'on tire $x = \sqrt{\frac{3brr}{a}}$ valeur du rayon de la base du cone que l'on demande.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

66. TROUVER *la valeur d'une sphere.*

FIG. 10. Soit décrit le demi-cercle ABD, si on conçoit que son diametre AD soit divisé en une infinité de parties égales, & que de tous ces points on mene des ordonnées PM, pm, il est clair que ce demi-cercle tournant sur le diametre décrira une sphere dans ce mouvement, & que toutes ses ordonnées décriront des surfaces circulaires que l'on peut regarder comme les parties dont la sphere est composée. Soit le rayon $BC = r$, la circonference $= c$, $PM = y$; $AP = x$, donc $Pp = dx$, pour avoir le cercle décrit par PM, on dira $r . c :: y . \frac{cy}{r} =$ à la circonférence, donc $\frac{cyy}{2r} =$ au cercle, & multipliant par dx, on aura $\frac{cyydx}{2r} =$ à la différentielle de la sphere. Mais à cause du cercle $yy = 2rx - xx$; mettant donc cette valeur à la place de yy, on aura $\frac{cyydx}{2r} = cxdx - \frac{cxxdx}{2r}$, & prenant l'intégrale de cette grandeur, on aura $\frac{cxx}{2} - \frac{cx^3}{6r} =$ à la portion de la sphere décrite par AMP; ce qui donne $\frac{2crr}{3}$ pour la valeur de la sphere cherchée, parce qu'en D, x devient $= 2r$.

AUTRE MANIERE.

FIG. 4. 67. SI l'on conçoit que du centre du demi-cercle DAE on décrive par tous les points du rayon CA des demi-circonférences MPO, mpo, il est clair que dans le mouvement de révolution du demi-cercle toutes ces demi-circonférences décriront des surfaces sphériques, dont la somme est la valeur de la sphere. Ayant nommé la surface entiére

de la ſphere; $2cr$; CP, x; donc $Pp = dx$, on trouvera la ſurface ſphérique décrite par la demi-circonference MPO en raiſonnant ainſi. Les ſurfaces des ſpheres ſont entr'elles comme les quarrez de leurs rayons, donc $rr.$ $2cr :: xx. \frac{2cxx}{r}$ = à la ſurface décrite par MPO, & $\frac{2cxxdx}{r}$ = à une portion concentrique infiniment petite de la ſphere, dont l'intégrale = $\frac{2cx^3}{3r}$ valeur du noyau ſphérique $PMQOP$, & $\frac{2crr}{3}$ = à la ſphere entiere, parce qu'en A, x devient $= r$.

COROLLAIRE.

68. Il eſt facile par cette méthode d'avoir la valeur du ſolide d'une ſphere creuſe, pourvû que l'on ſçache l'épaiſſeur de la matiere dont cette ſphere eſt compoſée.

AUTRE MANIERE.

69. ON peut conſidérer la ſphere comme un polyedre d'une infinité de ſurfaces, & que chacune de ces ſurfaces ſervent de baſes à autant de pyramides, qui ont pour ſommet commun le centre de la ſphere où elles ſe réuniſſent comme dans un point, & pour hauteur commune le rayon même de la ſphere. Multipliant donc la ſurface de la ſphere =* $2cr$ qui eſt la baſe de toutes ces pyramides, *Art. 20. par $\frac{1}{3}r$, on aura $\frac{2}{3}crr$ = à la ſphere cherchée.

COROLLAIRE.

70. IL eſt évident 1°. Que la ſphere eſt au cube de ſon diametre, comme les deux tiers de la circonférence eſt à quatre fois ſon diametre. Car $\frac{2}{3}crr. 8r^3 :: \frac{2}{3}c. 8r$, & par conſéquent que la ſphére eſt aux deux tiers du cube de ſon diametre, comme la circonférence eſt à quatre fois ſon diametre.

2°. Que la ſphére eſt au cylindre circonſcrit comme 2 eſt à 3 : car dans ce cas le cylindre = crr.

3°. Que la sphere est au cone qui a pour base un grand cercle de la sphere, & pour hauteur son diametre, comme 2 est à 1; car le cone $= \frac{crr}{3}$.

4°. Donc le cone, la sphere & le cylindre de même hauteur & de même diametre sont comme les nombres 1, 2, 3.

5°. Que le cone est égal à l'excès du cylindre par dessus la sphere.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

71. TROUVER *un cylindre égal à une sphere donnée.*

Soit la sphere donnée $= \frac{2crr}{3}$, & soit la base du cylindre $= \frac{cr}{2}$, & sa hauteur $= x$, on aura pour la valeur du cylindre $\frac{crx}{2} = \frac{2crr}{3}$ par la supposition; d'où l'on tire $x = \frac{4r}{3}$ pour la hauteur du cylindre; & mettant pour x cette valeur dans $\frac{crx}{2}$, on aura $\frac{2crr}{3}$; donc &c.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

72. TROUVER *une sphere égale à un cylindre donné.*

Soit le cylindre donné $= \frac{acr}{2}$, & soit le rayon de la sphere cherchée $= x$, on dira $r . c :: x . \frac{cx}{r} =$ à la circonférence du grand cercle de la sphere, & $\frac{cxx}{2r} =$ au cercle, donc la

* *Art.* 66. sphere* $= \frac{2cx^3}{3r} = \frac{acr}{2}$ par l'hypothese, d'où l'on tire $x = \sqrt[3]{\frac{3}{4}arr}$ valeur du rayon de la sphere que l'on demande. Si l'on eût pris $2r$ pour la hauteur du cylindre, on auroit

eu $crr = \frac{2cx^3}{3r}$, & $x = r\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

73. TROUVER *une ſphere égale à un cone donné.*

Soit le cone donné $= \frac{acr}{6}$, on aura * pour la valeur de la ſphere $\frac{2cx^3}{3r} = \frac{acr}{6}$ par l'hypotheſe, d'où l'on tire $x = \sqrt[3]{\frac{arr}{4}}$. Donc &c. * *Art.* 66.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

74. TROUVER *un cone égal à une ſphere donnée.*

Soit la ſphere $= \frac{2crr}{3}$, le cone ſera * $\frac{acxx}{6r} = \frac{2crr}{3}$; d'où l'on tire $x = \sqrt{\frac{4r^3}{a}} = 2r\sqrt{\frac{r}{a}}$. * *Art.* 62.

Il ſeroit facile en ſe ſervant de la même méthode, d'égaler les Solides dont on va donner la dimenſion, à des cylindres, des cones & des ſphéres, & par conſéquent de trouver le rapport que ces corps ont entr'eux.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

75. TROUVER *la valeur d'un ſolide formé par la révolution du triangle* A C B *autour de l'axe* D E *parallele à la baſe* A B. FIG. 29.

Soit tirée la ligne *CG* perpendiculairement ſur la baſe du triangle & qui en ſera la hauteur. Si l'on mene une infinité de lignes telles que *MM*, *mm*, paralleles à *AB*, il eſt clair qu'elles décriront dans leur mouvement autant de ſurfaces cylindriques qui ſeront entr'elles en raiſon compoſée de leurs rayons & de leurs hauteurs, & qui ſe-

ront les élemens ou les differentielles dont le Solide est composé. Soit nommé AB, a; CG, r; MM, y; CP, x; donc $Pp = dx$, & soit la circonférence décrite par le point $A, = c$, on aura la surface cylindrique décrite par $AB, = ac$; & pour avoir celle qui est décrite par MM, on dira $AB \times GC (ar) . ac$; ou $r . c :: MM \times PC (xy) . \frac{cxy}{r}$; & multipliant cette surface par dx, on aura $\frac{cxydx}{r} =$ à la différentielle du Solide; mais à cause du triangle, $a . r :: y . x$; donc $y = \frac{ax}{r}$, mettant pour y cette valeur dans $\frac{cxydx}{r}$ on aura $\frac{acxxdx}{rr}$, dont l'intégrale $= \frac{1acx^3}{3rr}$ valeur du Solide décrit par le triangle MCM, ce qui donne pour le Solide entier $\frac{1}{3} acr$, parce qu'en G, $x = r$.

COROLLAIRE.

76. Il est évident que si le triangle ABC avoit pour hauteur la moitié de AB, le Solide formé par sa révolution seroit égal à une sphere formée par un demi-cercle qui auroit pour diametre la base AB de ce triangle.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

FIG. 30. 77. TROUVER *la solidité d'un Conoïde parabolique formé par la révolution de la parabole* AMB *autour de l'axe* AD.

Soit menée une ordonnée quelconque $PM = y$ & une autre infiniment proche pm, soit $AD = a$, $AP = x$, donc $Pp = dx$, $DB = r$, & la circonférence décrite par le point $B, = c$. On peut considérer ce Solide comme composé d'une infinité de surfaces circulaires décrites par les ordonnées qui en seront les rayons: Ainsi pour avoir celle qui est décrite par PM, je raisonne ainsi : $r . c :: y . \frac{cy}{r} =$ à la circonférence décrite par le point M, donc le cercle qui

qui a pour rayon $PM = \frac{cyy}{2r}$, & multipliant cette grandeur par dx on aura $\frac{cyydx}{2r}$ = à la portion infiniment petite du conoïde : Mais à cause de la parabole $yy = 1x$, en prenant le parametre pour l'unité, donc $\frac{cyydx}{2r} = \frac{cxdx}{2r}$, & prenant l'intégrale, on aura $\frac{cxx}{4r} = \frac{cyyx}{4r}$ en remettant pour x sa valeur yy, valeur du Solide décrit par AMP, ce qui donne $\frac{acr}{4}$ pour le Solide entier, parce que x devenant a, y devient r.

COROLLAIRE.

78. Il est évident, 1°. Qu'un conoïde parabolique est au cylindre circonscrit comme 1 est à 2. Car ce cylindre $= \frac{acr}{2}$, donc &c.

2°. Que le cone inscrit est au cylindre comme 1 est à 3.

3°. Que le cylindre, le conoïde & le cone sont entr'eux comme les nombres 3, 1 $\frac{1}{2}$, 1.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

79. LES *mêmes choses étant posées, trouver la valeur de ces Solides, de quelque degré que soit la parabole.* FIG. 30.

Soit pour cela $y^m = x$, qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini, donc $y = x^{\frac{1}{m}}$, & $yy = x^{\frac{2}{m}}$: Mettant donc pour yy cette valeur dans la différentielle du Solide $=$ * $\frac{cyydx}{2r}$, on aura $\frac{cx^{\frac{2}{m}}dx}{2r}$, dont l'intégrale $=$ * Art. 73.

$\frac{mcx^{\frac{2}{m}+1}}{2m+4r} = \frac{mcxyy}{2m+4r}$ valeur du Solide formé par AMP, ce qui donne $\frac{m}{2m+4}acr$ = au Solide cherché. Ainsi en

général le conoïde est au cylindre circonscrit $\frac{acr}{2}$ comme m est à $m+2$.

Si $m=3$, l'équation sera $y^3=x$, & on trouvera $\frac{3}{10}acr$ pour la valeur du Solide, qui est au cylindre circonscrit comme 3 est à 5 : Car $\frac{3acr}{10}$. $\frac{acr}{2}$ :: 3. 5. &c.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

FIG. 30. 80. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'espace parabolique* AMBD *autour de* BT *parallele à l'axe.*

Soit la demi-parabole AMB qui a pour axe AD, soit menée l'ordonnée MP & une autre infiniment proche mp, prolongées jusqu'en Q, q. il est clair que toutes ces ordonnées décriront en tournant des surfaces circulaires, qui seront les élemens dont ce Solide est composé. Ayant nommé DB ou AT, r ; la circonférence décrite par le point D, c ; AP, x ; PM, y ; donc $MQ=r-y$; on dira, $r.c$ :: MQ $(r-y)$ $\frac{cr-cy}{r}=$ à la circonférence décrite par le point M ; donc $\frac{crr-2cry+cyy}{2r}=$ au cercle décrit par MQ. Et ôtant cette grandeur de $\frac{cr}{2}$ & multipliant par dx, on aura $\frac{2crydx-cyydx}{2r}=$ à la portion infiniment petite du Solide qui a pour hauteur Pp ; & mettant pour y sa valeur $x^{\frac{1}{2}}$ à cause de la parabole, on aura cette différentielle $\frac{2crx^{\frac{1}{2}}dx-cxdx}{2r}$, dont l'intégrale $=\frac{2crx^{\frac{1}{2}+1}}{3r}-\frac{cxx}{4r}=\frac{8crxy-3cxyy}{12r}$ qui est la valeur de la portion indéterminée du Solide décrite par APM, d'où l'on tire $\frac{5}{12}acr$ pour celle du Solide entier, parce que P en D, x devient $=a$, & $y=r$.

On trouvera les mêmes choses en considerant que les lignes menées dans la parabole paralleles à l'axe AD décrivent en tournant des surfaces cylindriques qui sont les élemens dont se Solide est composé.

COROLLAIRE.

81. Il est évident que ce Solide est au cylindre circonscrit comme 5 est à 6.

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

82. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'espace parabolique* AMBD *autour de la tangente au sommet* AT, *que l'on regarde comme l'axe.* FIG. 30.

Si l'on conçoit que la ligne AD soit divisée en une infinité de parties égales, & que de tous ces points on méne à la parabole des lignes QM, qm perpendiculaires sur AD, il est évident qu'elles décriront en tournant des surfaces cylindriques paralleles entr'elles. Ayant donc nommé AD, r; BD ou AT, a; AP ou QM, x; PM ou AQ, y; donc $Qq = dy$, & la circonférence décrite par le point D, c; on aura $ac =$ à la surface cylindrique décrite par DB; & pour avoir celle qui est décrite par QM, on dira $DB \times DA\,(ar).\ ac$ ou $r.c. :: QM \times QA\,(xy).\ \frac{cxy}{r} =$ à la surface cherchée, donc $\frac{cxydy}{r} =$ à la différentielle du Solide. Mais à cause de la parabole $xx = 1y$, donc $x = y^{\frac{1}{2}}$, & mettant cette valeur à la place de x, on aura $\frac{cy^{\frac{3}{2}}dy}{r}$, dont l'intégrale $= \frac{2}{5}\frac{cy^{\frac{5}{2}}}{r} = \frac{2}{5}\frac{cxyy}{r} =$ à la portion du Solide décrite par AQM, ce qui donne $\frac{2}{5}acr$ pour le Solide entier, parce qu'en B, x devient $= a$, & $y = r$. Ce qu'il falloit &c.

Si l'on vouloit avoir tout en x, on chercheroit la valeur

de $dy = 2xdx$, & on trouveroit en mettant pour yy & dy leurs valeurs, $\frac{2cx^4dx}{r}$ pour la differentielle du Solide, dont l'intégrale $= \frac{2cx^5}{5r}$, & mettant pour x^4 sa valeur yy, on auroit comme auparavant $\frac{2cxyy}{5r}$ où $\frac{2acr}{5}$ valeur du Solide cherché.

COROLLAIRE.

83. Il est évident 1°. Que ce Solide est au cylindre circonscrit comme 4 est à 5.

2°. Que le Solide décrit par la partie concave ATB de la parabole autour de AT, $= \frac{1}{10}\ acr$. Mais si on le vouloit avoir par la régle, ayant nommé BT, r, & c la circonférence décrite par le point B, on diroit $r . c :: y . \frac{cy}{r}$; donc le cercle décrit par le rayon MP, $= \frac{cyy}{2r}$; Ainsi on auroit pour la différentielle du Solide $\frac{cx^4dx}{2r}$, dont l'intégrale $= \frac{cx^5}{10r} = \frac{cyyx}{10r}$ valeur du Solide décrit par AMP; ce qui donne comme auparavant $\frac{acr}{10}$ = au Solide entier, qu'il falloit trouver.

PROPOSITION XVII.

PROBLEME.

FIG. 3[illegible]

84. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'espace parabolique autour de sa base* BD.

Ayant nommé AD, r; & DB, a; & le reste comme dans les articles précédens. Il est clair que toutes les ordonnées PM décriront des surfaces cylindriques paralleles qui seront entr'elles en raison composée de leurs rayons & de leurs hauteurs. Ainsi on aura pour celle qui est décrite par PM, $\frac{cry - cxy}{r}$, & pour le différentielle du Solide

$\frac{crydx - cxydx}{r}$: mais à cause de la parabole, $1x = yy$, & $dx = 2ydy$, mettant donc ces valeurs, on aura $\frac{2cryydy - 2cy^4dy}{r}$, dont l'intégrale $= \frac{2cry^3}{3r} - \frac{2cy^5}{5r}$ qui est la valeur de la portion de Solide décrite par APM, d'où l'on tire $\frac{4}{15}acr$ pour celle du Solide entier; parce qu'en D, x devient $= r$, & $y = a$.

On trouvera encore les mêmes choses si l'on considere que les lignes ménées dans la parabole paralleles à l'axe AD décrivent des surfaces circulaires qui seront les élémens du Solide.

COROLLAIRE.

85. Il est évident que ce Solide est au cylindre circonscrit comme 8 est à 15.

PROPOSITION XVIII.

PROBLEME.

86. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'espace parabolique* ABD *autour de* AD *lorsque les ordonnées* BD, MP *ne sont pas perpendiculaires sur* AD *qui est en ce cas un diametre.* FIG. 32.

Il est évident que toutes les ordonnées MP, mp au diametre de la parabole décriront en tournant des surfaces coniques, qui seront paralleles entr'elles & qui seront les élemens du Solide : Mais les surfaces des cones qui ont leurs côtez paralleles, sont entr'elles * comme les quarrez de ces côtez, donc ces surfaces seront entr'elles comme les quarrez des ordonnées BD, MP, qui en sont les côtez; & à cause de la parabole $\overline{BD}^2 . \overline{MP}^2 :: AD . AP$; donc ces surfaces seront comme AD, AP. Maintenant soit $AD = b$, $AP = x$, $DB = r$, & $c =$ à la circonférence décrite par le point B, on aura * $\frac{cr}{2}$ pour

* Art. 17.

* Art. 9.

la surface conique décrite par BD; & pour avoir celle qui est decrite par MP, on dira $b. x :: \frac{cr}{2}. \frac{crx}{b}$ = à la surface cherchée, & multipliant cette grandeur par dz, on aura $\frac{crxdz}{2b}$ = à la differentielle du Solide. Car ayant abaissé sur BD prolongée la perpendiculaire $AH = a$ qui est la hauteur du Solide, & continué les ordonnées MP, mp jusqu'en Q, q, & nommé AQ, z; donc $Qq = dz$. Mais à cause des triangles semblables APQ, ADH, $x, z :: b. a$, donc $z = \frac{ax}{b}$, & $dz = \frac{adx}{b}$; mettant donc cette valeur à la place de dz dans $\frac{crxdz}{2b}$, on aura $\frac{acrxdx}{2bb}$ dont l'intégrale $= \frac{acrxx}{4bb}$ valeur du Solide décrit par AMP, ce qui donne $\frac{acr}{4}$ pour le Solide entier, parce qu'en D, x devient $= b$. Ce qu'il falloit trouver. Si l'on fait $b = a$, l'on aura le problême de l'*art*. 77. en corollaire de celui-cy.

COROLLAIRE

87. Il est évident que ce Solide est à celui qui est formé par la révolution du parallelogramme TD comme 1 est à 2. Car ce Solide est égal à la surface conique décrite par BD & multipliée par la hauteur AH, $= \frac{acr}{2}$; donc &c.

PROPOSITION XIX.

PROBLEME.

FIG. 31. 88. LES *mêmes choses étant posées, trouver la valeur du Solide formé par la révolution de l'espace parabolique autour de* AT *tangente au sommet.*

Il est évident que toutes les ordonnées PM décriront en tournant des superficies cylindriques paralleles qui seront entr'elles en raison composée de leurs rayons & de leurs hauteurs, & qu'ainsi la surface cylindrique décrite par BD est à celle qui est décrite par PM comme $BD \times$

AH est à $MP \times AQ$, ou comme $BD \times AD$ est à $MP \times AP$, & nommant BD, a, AD, b; & AH, r; la circonférence décrite par H ou D, c; AP, y; MP, x; AQ, z: On dira $AD \times DB (ab)$. ac (surface cylindrique décrite par BD) :: $AP \times PM (xy)$. $\frac{cxy}{b} =$ à la surface cylindrique décrite par MP, & multipliant par dz, on aura $\frac{cxydz}{b} =$ à la différentielle du Solide. Mais à cause de la parabole $x = y^{\frac{1}{2}}$, & $dz = \frac{rdy}{b}$; mettant donc ces valeurs dans $\frac{cxydz}{b}$, on aura $\frac{cry^{\frac{3}{2}}dy}{bb}$, dont l'intégrale $= \frac{2}{5}\frac{cry^{\frac{5}{2}}}{bb} = \frac{2}{5}\frac{crxyy}{bb}$, en remettant pour $y^{\frac{1}{2}}$ sa valeur x. D'où l'on tire $\frac{2}{5} acr$ valeur du Solide que l'on demande, parce que y devenant $= b$, x devient $= a$.

COROLLAIRE.

89. Il est évident que ce Solide est à la superficie cylindrique décrite par BD & multipliée par AH comme 2 est à 5. Car cette superficie cylindrique décrite par BD & multipliée par AH, $= acr$.

Il est facile de rendre toutes ces propositions générales; ainsi on ne s'y arrêtera pas.

PROPOSITION XXXI.

PROBLEME.

90. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'espace hyperbolique* BAMFEC *autour de l'asymptote* CE. FIG. 13.

Soit menée l'autre asymptote $BC = r$, & deux ordonnées $PM = y$, Pm infiniment proches, soit $CP = x$, donc $Pp = dx$, $BA = a$, & la circonférence décrite par le point B, $= c$; Il est clair que les ordonnées PM,

pm décriront des ſurfaces cylindriques paralleles, & que ac eſt la valeur de celle qui eſt décrite par BA; & pour avoir celle qui eſt décrite par PM, on dira $CB \times BA$ $(ar) . ac$, ou $r . c :: CP \times PM (xy) . \frac{cxy}{r}$ = à la ſurface cherchée; donc $\frac{cxydx}{r}$ = à la différentielle du Solide. Mais à cauſe de l'hyperbole $xy = ar$, donc $\frac{cxydx}{r} = acdx$, dont l'intégrale $= acx$ eſt la valeur du Solide décrit par l'eſpace $ECPMF$, ce qui donne acr pour le Solide entier, parce qu'en B, x devient $= r$.

COROLLAIRE.

91. Il eſt évident que ce Solide eſt double du cylindre formé par la révolution du rectangle AC, quoique cependant le Solide hyperbolique ſoit formé par un eſpace infini, ce qui eſt digne de remarque.

PROPOSITION XXI.

PROBLEME.

FIG. 13. 92. LES *mêmes choſes étant poſées, trouver la valeur du Solide formé par la révolution de l'eſpace hyperbolique autour de l'aſymptote* CB.

Il eſt évident que les ordonnées décriront dans ce mouvement des ſurfaces circulaires paralleles, que l'on regarde comme les élemens dont ce Solide eſt compoſé. Et nommant c, la circonférence décrite par le point A, & AB, r, CB, a; on dira $r . c :: y . \frac{cy}{r}$, donc le cercle décrit par $PM = \frac{cyy}{2r}$, & $\frac{cyydx}{2r}$ = à la différentielle du Solide. Mais $xy = ar$ donc $yy = \frac{aarr}{xx}$, & mettant cette valeur à la place de yy, on aura $\frac{cyydx}{2r} = \frac{aacrdx}{2xx} = \frac{aacrx^{-2}dx}{2}$, dont l'intégrale $= -\frac{aacr}{2x}$ eſt la valeur ou partie de la valeur

leur du Solide décrit par l'espace $BAMP$, & cette intégrale devient $= \frac{acr}{2}$, lorsque $x = a$.

PROPOSITION XXII.

PROBLEME.

93. TROUVER *généralement la valeur de ces sortes de Solides formez par la révolution d'une hyperbole autour de ses asymptotes* C E.

On a eu 1°. * pour la différentielle du Solide $\frac{cxydx}{r}$; mais à cause de l'hyperbole $y^m = x$, m marquant un nombre négatif entier ou rompu, donc $y = x^{\frac{1}{m}}$, donc $\frac{cxydx}{r} = \frac{cx^{\frac{1}{m}+1}dx}{r}$, dont l'intégrale $= \frac{mcx^{\frac{1}{m}+2}}{2m+1r} = \frac{mcxxy}{2m+1r}$ (en remettant pour $x^{\frac{1}{m}}$ sa valeur y) ce qui donne pour le Solide entier $\frac{m}{2m+1}acr$. Ce qu'il falloit trouver. * *Art.* 91.

On a eu 2°. pour la différentielle du Solide $\frac{cyydx}{2r}$: or $y^m = x$, donc $dx = my^{m-1}dy$, & mettant cette valeur pour dx dans $\frac{cyydx}{2r}$, on aura $\frac{mcy^{m+1}dy}{2r}$, dont l'intégrale $= \frac{mcy^{m+2}}{2m+4r} = \frac{mcxyy}{2m+4r} =$; ce qui donne pour le Solide entier $\frac{m}{2m+4}acr$, parce que x devenant a, y devient r. * *Art.* 92.

PROPOSITION XXIII.

PROBLEME.

94. TROUVER *la valeur du conoïde hyperbolique formé par la révolution de l'hyperbole* AMB *autour de l'axe* AD.

FIG. 33.

Ayant mené la perpendiculaire $BD = r$, & une ordonnée quelconque $PM = y$, & une autre infiniment proche pm, il est évident qu'elles décriront des surfaces circulaires, dont la somme infinie est égale au Solide. Soit nommé l'axe traversant Aa, $2b$; AD, a; donc $Da = a + 2b$, AP, x; donc $Pp = dx$, & $Pa = x + 2b$. On aura en se servant de la méthode $\frac{cyydx}{2r}$ = à la différentielle du Solide: Mais à cause de l'hyperbole $rr . aa + 2ab :: yy . xx + 2bx$, d'où l'on tire $yy = \frac{rrxx + 2brrx}{aa + 2ab}$, & mettant pour yy cette valeur dans $\frac{cyydx}{2r}$, on aura $\frac{crxxdx + 2bcrxdx}{2aa + 4ab}$, dont l'intégrale $= \frac{crx^3}{6aa + 12ab} + \frac{bcrxx}{2aa + 4ab} = \frac{crx^3 + 3bcrxx}{6aa + 12ab}$ valeur du Solide formé par l'espace APM, ce qui donne $\frac{aacr + 3abcr}{6a + 12b}$ pour celle du Solide entier, parce qu'en D, x devient $= a$. Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE.

95. Il est évident que le cylindre circonscrit est à ce conoïde hyperbolique comme $3a + 6b$ est à $a + 3b$: car le cylindre $= \frac{acr}{2}$; donc &c.

PROPOSITION XXIV.

PROBLEME.

96. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'espace hyperbolique* AMBDC *autour de* CD *moitié de l'axe conjugué de l'hyperbole* AMB. FIG. 34.

Si on conçoit que l'axe conjugué CD soit divisé en une infinité de parties, & que de tous ces points on mene les ordonnées PM, pm, il est évident qu'elles décriront en tournant des surfaces circulaires dont la somme est égale au Solide. Soit donc nommé CA, a; CD, b; CP, x, Pp; dx, Pm, y, & c la circonférence décrite par le point B, on aura $\frac{cy}{r}$ = à la circonférence décrite par le point M, & $\frac{cyy}{2r}$ = au cercle qui a pour rayon PM, & multipliant ce cercle par dx, on aura $\frac{cyydx}{2r}$ = à la différentielle du Solide. Mais à cause de l'hyperbole $xx.yy - aa :: bb.aa.$ donc $yy = \frac{aaxx + aabb}{bb}$ & mettant cette valeur dans $\frac{cyydx}{2r}$, on aura $\frac{aacxxdx + aabbcdx}{2bbr}$, dont l'intégrale $= \frac{aacx^3}{6bbr} + \frac{aacx}{2r}$, & mettant pour aa sa valeur $\frac{bbyy}{xx + bb}$, il viendra $\frac{cx^3yy}{6rxx + 6bbr} + \frac{bbcyyx}{2rxx + 2bbr}$ pour la valeur du Solide formé par l'espace $AMPC$, & pour celle du Solide entier $\frac{bcr}{3}$, parce qu'alors x devient $= b$, & $y = r$. Ce qu'il falloit, &c.

COROLLAIRE.

97. Il est évident que le cylindre circonscrit est à ce Solide comme 3 est à 2 : car $\frac{bcr}{2}.\frac{bcr}{3} :: 3.2.$

REMARQUE.

LE Solide formé par la révolution d'une hyperbole autour de son axe conjugué meriteroit une attention parti-

culiere : Car outre qu'on le peut former par une ligne droite, ou par le taillant rectiligne d'un ciseau appliqué au tour, on peut y considérer les cinq Sections du cone, & de plus le parallelogramme rectangle. Car il est facile de démontrer 1°. que si on coupe ce Solide par un plan parallele à l'axe, & qui passe par le sommet de l'hyperbole génératrice, la section sera un triangle ou des triangles opposez. 2°. Si on le coupe par un plan perpendiculaire à l'axe, la section sera un cercle, 3°. Que si on le coupe par un plan parallele aux asympotes, la section sera une parabole, dont le sommet sera dans le point où le plan qui coupe la courbe génératrice. 4°. Si on le coupe par un plan qui fasse avec l'axe un angle plus grand que celui que fait l'asymptote, la section sera un ellipse. 5° Si on le coupe par un plan qui fasse avec l'axe un angle plus aigu que celui que fait l'asymptote, la section sera une hyperbole ou des hyperboles opposées. 6°. Enfin si on le coupe par un plan qui passe par l'asymptote même, la section sera un parallelogramme rectangle.

PROPOSITION XXV.

PROBLEME.

FIG. 35. 98. TROUVER *la valeur du Sphéroide allongé formé par la révolution de la demi-ellipse* A B D *autour de son grand axe* A D.

Ayant mené le petit axe $BE = 2r$, perpendiculaire sur $AD = 2a$, & tiré une ordonnée quelconque $PM = y$, & une autre infiniment proche pm, il est clair qu'elles décriront en tournant des surfaces circulaires. Soit $CP = x$, donc $AP = a - x$, $PD = a + x$, & $Pp = dx$: on aura donc $\frac{cyy}{2r}$ = au cercle décrit par l'ordonnée MP, & $\frac{cyydx}{2r}$ = à la différentielle du Solide. Mais à cause de l'ellipse $\overline{MP}^2$ (yy). $AP \times PD$ $(aa - xx)$ :: $\overline{BC}^2$ (rr). AC (aa). D'où l'on tire $yy = rr - \frac{rrxx}{aa}$, & mettant

cette valeur dans $\frac{cyydx}{2r}$, on aura $\frac{crdx}{2} - \frac{crxxdx}{2aa}$, dont l'intégrale $= \frac{crx}{2} - \frac{crx^3}{6aa}$ valeur du Solide formé par l'espace *BCPM*, ce qui donne $\frac{acr}{3}$ pour le Solide formé par *AMBCA*, parce qu'en *A*, *x* devient $= a$, dont le double ou le Solide entier $= \frac{2acr}{3}$. Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE I.

99. Il est évident 1°. que le sphéroïde allongé est au cylindre circonscrit comme 2 est à 3. Et comme le cylindre est au cone comme 3 est à 1; donc le sphéroïde est au cone comme 2 est à 1.

COROLLAIRE II.

100. Le sphéroïde est à la sphere qui lui est circonscrite comme le quarré du petit axe de l'ellipse est au quarré du grand. Car si on mene des ordonnées à l'ellipse & au cercle, il est clair qu'elles décriront en tournant, des cercles qui seront entr'eux comme les quarrez de ces mêmes ordonnées : Mais par la nature de l'ellipse le quarré d'une de ses ordonnées quelconque est au rectangle des parties de son axe, c'est à dire au quarré de l'ordonnée au cercle, comme le quarré du petit axe est au quarré du grand. Donc la somme de tous ces cercles, qui sont les élemens dont ce sphéroïde est composé, est la somme de tous les cercles qui composent la sphere, comme le quarré du petit axe est au quarré du grand; donc &c.

Il est manifeste qu'un segment quelconque de sphéroïde est au segment de sphére correspondant, comme le quarré du petit axe est au quarré du grand.

COROLLAIRE III.

101. Le spheroïde est à la sphere qui lui est inscrite comme le grand axe est au petit. Car si l'on mene des

ordonnées au petit axe de l'ellipse, il est clair qu'elles décriront en tournant des surfaces cylindriques qui seront entr'elles en raison composée de leurs rayons & de leurs hauteurs, c'est à dire qui seront entr'elles comme les ordonnées de l'ellipse & du cercle. Donc la somme de toutes les surfaces cylindriques qui sont les élemens dont le sphéroïde est composé, est à la somme des surfaces cylindriques qui composent la sphere, comme le grand axe est au petit; donc.

Il est clair qu'un segment quelconque de sphéroïde est au segment correspondant de la sphere inscrite comme le grand axe de l'ellipse est au petit.

COROLLAIRE IV.

102. Il est encore évident 1°. que la sphere & le sphéroïde sont en même raison par rapport à leurs cylindres circonscrits. 2°. Que la sphere & le sphéroïde sont en même raison que les cones inscrits à leurs cylindres circonscrits bâtis sur leurs grands cercles & de même hauteur qu'eux.

Il est facile par là de trouver la valeur d'un segment de sphéroïde elliptique, & d'une de ses portions quelconques coupée par deux plans paralleles.

On démontrera de même que le sphéroïde applati formé par la révolution de l'ellipse autour de son petit axe est au cylindre circonscrit comme 2 est à 3. Et on tirera les mêmes conclusions.

Delà il suit que le sphéroïde oblong est au sphéroïde applati comme le petit axe de l'ellipse est au grand.

PROPOSITION XXVI.

PROBLEME.

FIG. 17. 103. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'espace logarithmique* AMBCE *autour de l'asymptote* CE.

Si l'on conçoit que l'asymptote CE soit divisée en une infinité de parties égales, & que de tous ces points on mene des ordonnées PM; pm, il est clair qu'elles décriront des cercles paralleles qui seront les élemens du Solide. Soit $CB = r$, $PM = y$, & $c =$ à la circonférence décrite par le point B; on aura $\frac{cyy}{2r} =$ au cercle qui a pour rayon PM, & $\frac{cyydx}{2r} =$ à la différentielle du Solide. Mais par la proprieté de la logarithmique $dx = \frac{ady}{y}$, donc $\frac{cyydx}{2r} = \frac{acydy}{2r}$, dont l'intégrale $= \frac{acyy}{4r} =$ au Solide formé par l'espace infiniment long $EPMA$, ce qui donne $\frac{acr}{4}$ pour le Solide entier que l'on demandoit, parce qu'en CB, y devient $= r$.

COROLLAIRE.

104. Il est évident que le Solide formé par cet espace infini est au cone qui a pour hauteur la soutangente de la courbe, & pour base celle du Solide comme 3 à 2. Car ce cone $= \frac{acr}{6}$; donc &c.

PROPOSITION XXVII.

PROBLEME.

105. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'espace* AMB *autour de l axe* AB, *& dont la nature de la courbe est exprimée par cette équation générale* $y =$ FIG. 21.

$$\frac{\overline{a - x} \times x^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

On déterminera 1°. le point de la plus grande largeur de la courbe, & puis menant une ordonnée à ce point que j'appelle r, & tirant d'autres ordonnées paralleles PM, pm; $= y$; elles décriront en tournant des cercles;

& on aura pour celui qui est décrit par PM, $\frac{cyy}{2r}$, & pour la différentielle du Solide $\frac{cyydx}{2r}$. Mais $y = \frac{\overline{a-x} \times x^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}}$, donc

$$yy = \frac{aax^{\frac{2m}{n}} - 2ax^{\frac{2m}{n}+1} + x^{\frac{2m}{n}+2}}{a^{\frac{2m}{n}}}$$, & mettant cette valeur

dans $\frac{cyydx}{2r}$, il viendra $\frac{aacx^{\frac{2m}{n}}dx - 2acx^{\frac{2m}{n}+1}dx + cx^{\frac{2m}{n}+2}dx}{2ra^{\frac{2m}{n}}}$

dont l'intégrale qui est la valeur du Solide formé par AMP,

$$= \frac{naacx^{\frac{2m}{n}+1}}{\overline{4m+2nr} \times a^{\frac{2m}{n}}} - \frac{nacx^{\frac{2m}{n}+2}}{\overline{2m+2nr} \times a^{\frac{2m}{n}}} + \frac{ncx^{\frac{2m}{n}+3}}{\overline{4m+6nr} \times a^{\frac{2m}{n}}}$$; ce

qui donne pour celle du Solide entier décrit par l'espace

AMB $\frac{na^3c}{4m+2nr} - \frac{na^3c}{2m+2nr} + \frac{na^3c}{4m+6nr} = \frac{n^3a^3c}{8m^3+24mmn+22mnn}$

parce que P en B, x devient $= a$.

Si $m = 2$, & $n = 1$, on trouvera pour le Solide formé par AMP, $\frac{cx^5}{10aar} - \frac{cx^6}{6a^3r} + \frac{cx^7}{14a^4r}$, & pour celle du Solide entier $\frac{a^3c}{210r}$. Or par la méthode *de maximis & minimis*, x étant égale à $\frac{2}{3}a$, on aura en mettant cette valeur dans l'équation à la courbe $aay = axx - x^3$, pour la plus grande des ordonnées $y = r$, $\frac{4}{27}a$. Ainsi $\frac{a^3c}{210r} = \frac{9aac}{280}$. Or le cylindre circonscrit à ce Solide, ayant pour rayon de sa base la plus grande des ordonnées, & pour hauteur l'axe AB, sa valeur sera $\frac{2}{27}aac$; donc le Solide formé par la révolution de la courbe AMB est au cylindre circonscrit comme 243 est à 560.

On trouvera avec la même facilité la valeur des Solides formez par la révolution des courbes AND, AQB, & le rapport qu'ils ont entr'eux.

PROP. XXVIII.

PROPOSITION XXVIII.

PROBLEME.

106. LES *mêmes choses étant posées que dans l'*article 34. *trouver le Solide formé par la révolution du segment* AFBA *autour de* HI *parallele & égale à* AB. FIG. 11.

On achevera le parallelogramme AI, & en supposant que tout l'espace $HAFBI$ tourne sur HI, on cherchera la valeur du Solide entier fait par la révolution de cet espace en cette maniere.

Soit d'un point quelconque N de l'arc AFB menée l'ordonnée NP prolongée jusqu'en Q, & une autre infiniment proche nq, il est clair que ces lignes décriront des cercles qui feront les élemens du Solide. Nommant donc c, la circonférence décrite par le point F; NP, z; PQ, r; donc $NQ = r + z$, AP, x; donc Pp ou $Qq = dx$; on dira $FE(r\sqrt{2})$. $c :: NQ(r+z)$. $\frac{cr+cz}{r\sqrt{2}}$ = à la circonférence décrite par le point N, & multipliant par $\frac{rdx+zdx}{2}$, on aura $\frac{crrdx+2crzdx+czzdx}{2r\sqrt{2}}$ = à la différentielle du Solide : Mais $\overline{NQ}^2 - \overline{PQ}^2 = AP \times PB$, c'est-à-dire $2rz+zz = 2rx - xx$, mettant donc cette valeur à la place de $2rz+zz$, il viendra $\frac{crrdx+2rrxdx-cxxdx}{2r\sqrt{2}}$ dont l'intégrale $= \frac{crx}{2\sqrt{2}} + \frac{cxx}{2\sqrt{2}} - \frac{cx^3}{6r\sqrt{2}}$ est égale au Solide formé par l'espace $HANQ$, ce qui donne $\frac{crr}{\sqrt{2}} + \frac{2crr}{\sqrt{2}} - \frac{4crr}{3\sqrt{2}}$ pour la valeur du Solide entier, parce qu'en B, x devient $= 2r$.

Il est évident que le premier membre $\frac{crr}{\sqrt{2}}$ est égal au cylindre décrit par la révolution du rectangle AI autour de HI, & que les deux autres $\frac{2crr}{\sqrt{2}} - \frac{4crr}{3\sqrt{2}} = \frac{2crr}{3\sqrt{2}}$ sont

égaux à la ſphere décrite par la révolution du demi-cercle ADB autour de AB, car en ce cas la circonférence $= \frac{c}{\sqrt{2}}$. Donc le Solide formé par le ſegment $AFBA$ eſt égal à la ſphere formée par le demi-cercle ADB. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION XXIX.

PROBLEME.

107. LES *mêmes choſes étant poſées trouver la valeur d'un Solide formé par la révolution de la Lunule autour de* HI.

Suppoſant que la figure entiere $HADBI$ tourne ſur HI, elle décrira un Solide dont on cherchera la valeur en cette ſorte.

Soient prolongées les lignes QN, qn juſqu'en M & m, elles décriront en tournant des cercles paralleles. Et nommant DE, $2r$, MP, y; donc $MQ = r + y$, & c, la circonférence décrite par le point D; on dira $2r . c :: r + y . \frac{cr + cy}{2r}$ = à la circonférence décrite par le point M, donc $\frac{crr + 2cry + cyy}{4r}$ = au cercle décrit par MQ; mais $yy = 2rx - xx$, & $y = \sqrt{2rx - xx}$; mettant donc ces valeurs & multipliant par dx, on aura $\frac{crrdx + 2crxdx - cxxdx + 2crdx\sqrt{2rx - xx}}{4r}$ = à la différentielle du Solide, dont l'intégrale $= \frac{crx}{4} + \frac{cxx}{4} - \frac{cx^3}{12r}$ + l'intégrale de $\frac{cdx\sqrt{2rx - xx}}{2} = \frac{crx}{4} + \frac{cxx}{4} - \frac{cx^3}{12r} + \frac{c}{2} \times APMA$ eſt la valeur de la portion indéterminée du Solide décrit par l'eſpace $HAMQ$; ce qui donne $\frac{crr}{2} + crr - \frac{2}{3} crr + \frac{c}{2} \times ADBA = \frac{crr}{2} + \frac{1}{3} crr + \frac{ccr}{16}$, (car l'eſpace $ADBA = \frac{cr}{8}$) pour celle du Solide entier, parce qu'alors x devient $= 2r$. Or le pre-

mier membre $\frac{crr}{2}$ eſt égal au cylindre décrit par le rectangle AI, car ſa circonférence $= \frac{c}{2}$, donc les deux autres membres $\frac{1}{3}crr + \frac{1}{16}ccr$ valent le Solide formé par la révolution du demi-cercle ADB autour de HI: ôtant donc de cette valeur, celle du Solide formé par le ſegment $AFBA$ que l'on a trouvé dans le problême précedent valoir la ſphere ($\frac{1}{3}crr$) décrite par le demi-cercle ADB, le reſte $\frac{1}{16}ccr$ ſera la valeur de celui qui eſt formé par la révolution de la Lunule. Ce qu'il falloit trouver.

Il eſt évident que ſi l'on déterminoit exactement la valeur de ce Solide, on auroit la quadrature du cercle.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME.

108. TROUVER *le Solide formé par la révolution de l'eſpace Ciſſoïdal autour de ſon aſymptote* BF. FIG. 2[illegible]

Les mêmes choſes étant poſées que dans *l'article* 55. toutes les ordonnées PN à la Ciſſoïde décrivant des ſurfaces cylindriques, on dira $r.c :: PB \times PN (x\sqrt{2rx-xx})$. $\frac{cx\sqrt{2rx-xx}}{r}$ = à la ſurface décrite par PN, & $\frac{cxdx\sqrt{2rx-xx}}{r}$ = à la différentielle du Solide.

Pour avoir ſon intégrale, ſoit entendu le demi-cercle générateur AMB tourner autour d'un axe parallele à l'aſymptote BF, & qui paſſe par le point A, toutes les ordonnées PM décriront encore des ſurfaces cylindriques; ainſi on aura $\frac{cxdx\sqrt{2rx-xx}}{r}$ pour la différentielle de ce Solide, laquelle étant la même que celle du Solide précedent, il eſt clair que le Solide formé par la révolution de l'eſpace ciſſoïdal infiniment étendu, autour de ſon aſympote eſt égal au Solide formé par la révolution de ſon demi-cercle générateur autour d'une droite parallele à l'aſymptote paſſans par le point A.

PROPOSITION XXXI.

PROBLEME.

FIG. 36. 109. TROUVER *la valeur du Solide formé par la révolution de l'espace Conchoïdal* B M A D E *autour de l'asymptote.* D E.

Soit la Conchoïde AMB telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M au pole C, la droite MC, qui coupe l'asymptote en K, le rectangle de $CK \times KM$ soit toûjours égal au rectangle de $CD \times DA$. On demande la valeur du Solide formé par cet espace conchoïdal.

Ayant décrit du diametre AD le demi-cercle AND, & d'un point quelconque P de ce diametre ayant mené l'ordonnée PM, & une autre infiniment proche pm; il est clair qu'elles décriront en tournant des surfaces cylindriques paralleles.

Soit donc $AC = a$; $AD = 2r$; $AP = x$, donc $CP = a - x$, $PD = 2r - x$, & $Pp = dx$; $PM = z$; $PN = y$; on aura par la proprieté de la conchoïde $AP\,(x).\ PD\,(2r - x) :: \overline{PM}^2\,(zz).\ \overline{CP}^2\,(aa - 2ax + xx)$; donc $zz \times \overline{2r - x} = aax - 2axx + x^3$, d'où l'on tire $z = \overline{a - x}\sqrt{\frac{x}{2r - x}}$. Et pour avoir la surface cylindrique décrite par PM, on dira $r.\ c :: PD \times PM\ \left(\overline{2r - x} \times \overline{a - x}\sqrt{\frac{x}{2r - x}}\right).\ \frac{2acr - acx - crx + cxx}{r}\sqrt{\frac{x}{2r - x}} =$ à la surface cherchée; & multipliant par dx, on aura la valeur du petit Solide qui a pour hauteur Pp.

Pour avoir l'intégrale de cette differentielle, soit entendu le demi-cercle AND tourner autour d'une ligne parallele à l'asymptote DE passant par le pole C de la conchoïde, il est clair que toutes les lignes PN décriront aussi des surfaces cylindriques paralleles. On dira donc

$r.c :: PN \times PC (\overline{a-x}\sqrt{\overline{2rx-xx}}). \frac{\overline{ac-cx}\sqrt{\overline{2rx-xx}}}{r} =$ à la surface cylindrique décrite par PN. Mais $NP \times PC$ $(\overline{a-x}\sqrt{\overline{2rx-xx}}) = PD \times PM \left(\overline{2r-x} \times \overline{a-x}\sqrt{\frac{x}{2r-x}}\right)$.

Car $AP.PD :: \overline{PN}^2.\overline{PD}^2$; donc $PN.PD :: PM.CP$: Donc les différentielles de ces deux Solides sont égales, donc leurs intégrales, c'est-à-dire les sommes des élemens qui composent ces Solides, sont aussi égales : Donc le Solide formé par la révolution de l'espace conchoïdal infiniment étendu, autour de son asymptote est égal au Solide formé par la révolution du demi-cercle AND autour de la parallele à l'asympote passant par le pole C. Ce qu'il falloit trouver.

SECTION TROISIÉME.

DES CENTRES DE PESANTEUR.

IL y a dans tous les corps qu'on nomme pesans, une certaine partie, laquelle étant en repos, toutes les autres qui l'environnent dans des distances réciproquement proportionnelles à leurs masses, demeurent immobiles. Cette partie n'ayant aucune grandeur déterminée à cause de la divisibilité de la matiére à l'infini, on la regarde comme un point qu'on nomme centre de pesanteur. Ainsi le centre de pesanteur d'un corps est un point dans lequel on considére que le poids de toutes les petites parties dont le corps est composé, est tellement réüni, que si on le soûtenoit ou si on le suspendoit par ce point, il demeureroit toûjours en équilibre. Si donc un corps est soûtenu par un autre point que celui par où la ligne qui joint son centre de pesanteur, ne passe pas, il est évident qu'il ne demeurera pas immobile, & qu'il se mouvra jusqu'à ce que cette ligne passant par le centre de pesanteur, se trouve étant prolongée perpendiculaire à la surface de la terre: car concevant que toute la pesanteur de ce corps est réünie dans ce point, elle le pousse toûjours vers le centre de la terre, ainsi il faut qu'il en approche le plus qu'il est possible.

Des corps ou ce qui est la même chose des poids sont dits être en équilibre, lors qu'étant suspendus aux bras d'une ligne infléxible, considérée sans pesanteur, & posée librement sur un appui, ils sont entr'eux en raison réciproque des distances du point d'appui, c'est-à-dire lorsqu'un des poids est à l'autre comme la distance entre l'ap-

pui & l'un des poids est à la distance entre l'appui & l'au-

Cor. Il suit de là que la somme des moments d'un nombre
quelconque de forces appliquées à un même corps est égale
au moment de la résultante. Car la force Q peut être considérée
comme résultante de deux autres Q', Q'' dont la somme des
moments $m.Q' + m.Q'' = mQ$ donc $m.Q' + mQ'' + mP = mR$.
mais les forces Q', Q'' pourront être considérées comme
les résultantes d'autres forces, et ainsi de suite. Donc &c.

Cor. Le moment du poids d'un corps quelconque est
donc égal à la somme des moments de la pesanteur de
chaque élément de ce corps : la distance du centre de gravité à l'axe des moments
ou point d'application de leur résultante est donc égale à
cette somme divisée par le poids du corps. &c.

Dans un corps homogène le poids de chaque partie est
proportionnelle à son volume

Le moment de la pesanteur d'un élément étant considéré
la différentielle de celui du poids d'un corps on aura
[illegible] intégrant cette différentielle.

coupez par le milieu, par une ligne ou par un plan en telle sorte que toutes les parties d'un segment soient égales aux parties respectives de l'autre, & également éloignées de cette ligne ou de ce plan, il est évident que le centre de pesanteur de toutes ces figures doit être dans cette ligne ou dans ce plan.

Ainsi le centre de pesanteur d'un triangle, d'un parallelogramme, d'un polygone régulier, d'un cercle, d'une ellipse, d'une portion de cercle, d'ellipse, d'une parabole, d'une hyperbole, d'un prisme, d'un cylindre, d'une pyramide, d'un cone, d'une sphere, d'un sphéroïde, d'un conoïde ou d'une portion quelconque, se trouve dans une ligne ou dans un plan qui passe par quelque diametre que ce soit de ces figures, c'est-à-dire par une ligne qui en traverse par le milieu les coupes paralleles à la bare. De-là il est facile d'avoir le centre de pesanteur d'un triangle, d'un parallélogramme, d'un polygone, d'un cercle, d'une ellipse, d'une sphere, d'un sphéroïde, d'un cube & de toutes sortes de figures qui ont plusieurs diametres qui concourent en un même point; car ce centre se trouve dans leur concours.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

110. TROUVER *le centre de pesanteur d'une ligne.*

FIG. 57. Soit la ligne $AB = x$, & une de ses parties infiniment petite $= dx$, on aura $x\,dx$ pour la differentielle des momens, dont l'intégrale $= \frac{xx}{2}$ sera la somme des momens, laquelle étant divisée par la somme des poids $= x$, donnera $\frac{1}{2}x$; c'est-à-dire que si on divise cette ligne en deux parties égales, le point de division sera le centre de pesanteur de la ligne.

PROPOS. II.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

111. TROUVER *le centre de pesanteur d'un parallelogramme* ABCD. FIG. 81.

Il est évident que ce centre se doit trouver sur la ligne EF qui divise ce parallelogramme en deux parties égales. Soit AD ou $EF = a$, $EP = x$, donc $Pp = dx$, $AB = b$; on aura $bdx =$ à la différentielle des poids, & multipliant par le bras x, on aura $bxdx =$ à la différentielle des momens, dont l'intégralle $= \frac{bxx}{2}$, laquelle étant divisée par $bx =$ à la somme des poids, donnera $\frac{x}{2}$ pour le centre de pesanteur du parallélogramme AM, ce qui donne $\frac{a}{2}$ pour celui du parallélogramme entier que l'on cherchoit, parce qu'en F, x devient $= a$.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

112. TROUVER *le centre de pesanteur d'un triangle isoscele.*

Soit le triangle isoscele BAC; du sommet A on abaissera la perpendiculaire AD, qui divisera le triangle en deux parties égales; ainsi c'est sur cette ligne que doit se trouver le centre de pesanteur de ce triangle. Soit menée une ligne quelconque $MM = y$ parallele a la base $BC = b$, & une autre mm infiniment proche, & soit $AD = a$, $AP = x$, donc $Pp = dx$; & $ydx =$ à la differentielle des poids; mais à cause des triangles semblables AMM, ABC, x, $y :: a.b$, donc $y = \frac{bx}{a}$, & $ydx = \frac{bxdx}{a}$, & multipliant cette grandeur par son bras $= x$, on aura $= \frac{bxxdx}{a} =$ à la différentielle des momens, dont l'intégrale $= \frac{bx^3}{3a}$, laquelle FIG. 82.

étant divisée par la somme des poids $=\frac{bxx}{2a}$, il viendra $\frac{2}{3}x$ pour la distance de l'axe de balancement qui passe par le sommet A au centre de pesanteur du triangle MAM; ce qui donnera $\frac{2}{3}a$ pour celle du triangle BAC parce qu'en D, x devient $=a$.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

FIG. 48. 113. TROUVER *le centre de pesanteur de tout triangle.*

Soit un triangle quelconque BAC, ayant abaissé du sommet A la ligne $AD=a$, qui divise le triangle en deux parties égales, il est visible que le centre de pesanteur doit se trouver sur cette ligne. Soit menée $AR=h$ perpendiculaire, & $MM=y$ parallele à la base $BC=b$, & une autre infiniment proche mm. Soit $AP=x$, $AQ=z$, donc $Qq=dz$. On aura pour la différentielle des poids ydz, & à cause des triangles semblables AQP, ARD. z, $x::h.a$, donc $z=\frac{hx}{a}$, & $dz=\frac{hdx}{a}$; substituant cette valeur à la place de dz dans ydz, on aura $\frac{hydx}{a}$; mais à cause des triangles semblables MAM, BAC, $y=\frac{bx}{a}$, donc $\frac{hydx}{a}=\frac{hbxdx}{aa}$, & multipliant cette grandeur par son bras $=x$, on aura $\frac{hbxxdx}{aa}$ qui sera la différentielle des momens, dont l'intégrale qui est la somme des momens $=\frac{hbx^3}{3aa}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $=\frac{hbxx}{2aa}$ donnera $\frac{2}{3}x$ pour la distance du sommet A au centre de pesanteur du triangle MAM, & $\frac{2}{3}a$ pour celle du triangle entier BAC, parce qu'en D, x devient $=a$. Il est donc évident que si on divise la ligne qui partage le triangle en deux également, en telle sorte que la partie AP prise du sommet A de ce triangle, soit à la toute

AD comme 2 est à 3, on aura le point *P* pour son centre de pesanteur.

COROLLAIRE.

114. On peut trouver facilement le centre de pesanteur de la surface d'une pyramide & d'un cone droit, puisque ces surfaces sont composées de triangles dont on connoît le centre de pesanteur.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

115. TROUVER *le centre de pesanteur d'un arc de cercle.* FIG. 14.

Soit 1°. l'arc de cercle *EBF* moindre que la demi-circonférence, dont on demande le centre de pesanteur. Il est évident que ce centre doit se trouver sur le rayon qui divise cet arc par le milieu. Car si on tire une infinité de cordes paralleles à *EF*, elles diviseront l'arc *EBF* en une infinité de petits arcs égaux, que l'on peut regarder comme autant de poids attachez à des bras de balance qui sont toutes ces cordes divisées en deux parties égales par le rayon qui coupe l'arc par la moitié.

Maintenant pour trouver le centre de pesanteur de l'arc sur ce rayon, soit méné le diametre *AD* parallele à la corde *EF*, & l'ordonnée *MP*, & une autre infiniment proche *mp*, & soit tiré le rayon *CM*. Ayant nommé le diametre *AD*, $2r$, que je prens pour l'axe de balancement; la corde *EF*, $2a$; l'arc *EBF*, $2c$; l'ordonnée *MP*, y; & *CP*, x; donc $Pp = dx$, l'arc *BM*, z; donc $Mm = dz$, & multipliant dz par le bras $MP = y$, on aura pour le moment differentiel $ydz = rdx$; car à cause des triangles semblables *CPM*, *MRm*, *PM* (y). *CM* (r) :: *MR* (dx). *Mm* (dz): prenant donc l'integrale de rdx, on aura pour la somme des momens rx, laquelle étant divisée par la somme des poids $= BM = z$,

donnera $\frac{rx}{z}$ pour la diſtance du diamettre AD au centre de peſanteur de l'arc MB, ce qui donne $\frac{ar}{c}$ pour celle de ce même diametre AD au centre de peſanteur de l'arc EBF, parce que z devenant c, x devient a.

COROLLAIRE.

116. Il eſt évident 1°. que la diſtance du centre de peſanteur d'un arc de cercle au centre de ce cercle eſt au rayon, comme la corde de cet arc eſt à l'arc ; & dans la demi-circonférence, comme le diametre du cercle eſt à la demi-circonférence.

2°. Que la raiſon de la corde à ſon arc étant donnée, on à le centre de peſanteur de l'arc, & réciproquement le centre de peſanteur d'un arc de cercle quelconque étant donné, on a la raiſon de cet arc à la corde, & par conſéquent le rapport du diametre à la circonférence, ce qu'on appelle la quadrature du cercle.

Si l'on ſuppoſe maintenant 3°. que l'arc de cercle ſoit plus grand que la demi-circonférence, on trouvera la même choſe en faiſant à peu près les mêmes raiſonnemens. Ou bien comme ce centre doit ſe trouver ſur le même rayon prolongé, & qu'on a le centre de pèſanteur de tout le cercle, on dira comme l'arc EGF eſt à l'arc EBF, ainſi la diſtance du centre du cercle au centre de peſanteur de l'arc EBF eſt à la diſtance cherchée du centré de peſanteur de l'arc EGF, au centre du cercle. Il eſt évident que les centres de peſanteur d'arcs ſemblables de différens cercles diviſent leurs rayons en même raiſon.

Le centre de peſanteut d'un arc de cercle étant donné, il ſera facile d'avoir le centre de peſanteur d'une portion quelconque de la ſurface d'un cylindre droit compriſe par deux droites perpendiculaires ſur la baſe. Car ce centre doit ſe trouver dans le milieu de la droite qui joint les centres de peſanteur des arcs des baſes oppoſées.

On pourroit dire la même chose des autres solides qui ont pour le circuit de leurs bases, des courbes, si on avoit le centre de pesanteur de ces courbes.

Ce qu'on vient de dire des cylindres droits, pourroit s'étendre aux surfaces des cylindres obliques : car on démontre en Géometrie que la surface d'un cylindre droit est à la surface d'un cylindre oblique de même côté & de même base, comme le contour de la base est au contour de la section, qui est perpendiculaire à l'axe. Ce qui se doit aussi entendre des parties correspondantes.

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

117. TROUVER *le centre de pesanteur d'un secteur de cercle.*

Soit un secteur du cercle quelconque *MCM*, dont on demande le centre de pesanteur : il est évident qu'il est composé d'une infinité de petits secteurs tels que *MCm*, que l'on peut considerer comme autant de triangles rectilignes, à cause de l'infinie petitesse des arcs *Mm*. Mais le centre de pesanteur d'un triangle * est distant de son sommet des deux tiers de sa hauteur : si donc du rayon $CQ = \frac{2}{3} CM$ on décrit l'arc *QPQ*, il est clair que les centres de pesanteur de tous les petits triangles qui remplissent le secteur se trouveront sur cet arc. Considerant donc tous les points de cet arc également chargez, puisqu'ils soûtiennent par le centre de pesanteur des triangles égaux, on voit évidemment que le centre de pesanteur de l'arc *QPQ* ainsi chargé sera le même que celui du secteur *MCM*. Faisant donc comme l'arc *QPQ* est à sa corde, ou l'arc *MAM* à la sienne, ainsi *CQ* ou $\frac{2}{3} AC$ est à la distance du centre *C* du cercle au centre de pesanteur de cet arc *QPQ*, lequel est aussi celui du secteur *MCM*. FIG. 41. * Art. 112.

Ou bien on dira comme la distance du centre de pe-

fanteur de l'arc MAM au centre C du cercle, eſt à celle du centre de peſanteur de l'arc QPQ ou du ſecteur MCM, à ce même centre C, ainſi la corde MM eſt à la corde QQ, c'eſt-à-dire : $MC.QC :: 1.\frac{2}{3}$; de ſorte que celle de l'arc MAM étant* $= \frac{MM \times AC}{MAM}$, l'on aura celle du ſecteur MAC, $= \frac{2MM \times AC}{3MAM}$.

*Art. 115.

AUTRE MANIERE.

FIG. 41. 118. AYANT décrit librement du centre C l'arc QPQ, & mené les cordes MM, QQ, on nommera le rayon CM, r; la corde MM, $2a$; l'arc MAM, $2c$; & le rayon indéterminé CQ, x; & ayant décrit un autre arc qpq infiniment proche, on aura $Qq = dx$.

*Art. 115.

Or il eſt évident* que le moment de l'arc MAM par rapport au diametre eſt à celui de l'arc QPQ en raiſon composée de la corde MM à la corde QQ, & du rayon CM au rayon CQ, c'eſt-à-dire comme rr eſt à xx, puiſque ces deux raiſons ſont égales : Ainſi pour avoir le moment de l'arc QPQ, on dira comme rr eſt à xx, ainſi le moment de l'arc $MAM = 2ar$ eſt au moment de l'arc $QPQ = \frac{2axx}{r}$, & multipliant par dx, on aura $\frac{2axxdx}{r} =$ au moment de la portion annulaire infiniment petite du ſecteur ſphérique; dont l'intégrale $= \frac{2ax^3}{3r}$, laquelle étant diviſée par cr valeur du Secteur, donne $\frac{2ax^3}{3crr}$ pour la diſtance cherchée du centre de peſanteur du ſecteur QCQ, & $\frac{2ar}{3c}$ pour celle du ſecteur MCM; parce que Q étant en M, x devient r. D'où l'on peut tirer cette concluſion, que le centre de peſanteur d'un ſecteur de cercle eſt ſitué ſur le rayon qui le diviſe par le milieu, en telle ſorte que ſa diſtance du centre du cercle eſt aux deux tiers du rayon, comme la corde eſt à l'arc.

Ainſi dans le demi-cercle, comme la demi circonférence eſt à ſa corde, c'eſt-à dire au diametre du cercle,

ainsi les deux tiers du rayon est à la distance du centre de pesanteur du demi-cercle.

COROLLAIRE.

119. Il est évident que connoissant le centre de pesanteur du secteur *MCM*, & du triangle *MCM*, on connoîtra aussi le centre de pesanteur du segment *MAM*, Il en est de même pour les autres portions du cercle.

Il est encore manifeste que les centres de pesanteur des secteurs semblables de différens cercles divisent en même raison les rayons sur lesquels ils sont situez.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

120. TROUVER *le centre de pesanteur d'un espace renfermé par une parabole.*

Les mêmes choses étant posées que dans *l'article* 35. on aura $y\,dx = x^{\frac{1}{2}}dx$ pour la différentielle des poids, & multipliant cette grandeur par son bras $= x$, on aura $x^{\frac{3}{2}}dx =$ à la différentielle des momens, dont l'intégrale $= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, on aura $\frac{3}{5}x$ pour la distance de l'axe de balancement passant par le point *A*, au centre de pesanteur de l'espace *MAM*, & $\frac{3}{5}a$ pour *BAB*, parce qu'en *D*, x devient $= a$. FIG. 12.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

121. TROUVER *généralement le centre de pesanteur d'un espace renfermé par une parabole, dont la nature est exprimée par cette équation*, $y^m = x$.

On aura $^{*}\ x^{\frac{1}{m}}dx =$ à la différentielle des poids, & * Art. 38.

*Art. 109. $x^{\frac{1}{m}+1} dx$ = à celle des momens *, dont l'intégrale $= \frac{m}{2m+1} x^{\frac{1}{m}+2}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{m+1}{m} x^{\frac{1}{m}+1}$, donnera $\frac{m+1}{2m+1} x$ pour la distance du centre de pesanteur à l'axe de balancement TT passant par le sommet A, de l'espace indéterminé MAM, & $\frac{m+1}{2m+1} a$ pour celle de l'espace entier que l'on cherchoit. Ainsi la ligne AD doit être divisée en telle sorte que la partie qui est du côté de la base soit à l'autre, comme 1 est à $\frac{1}{m} + 1$, ou comme m est à $m + 1$, Car $a. \frac{m+1}{2m+1} a :: 2m + 1. m + 1$; & $a \frac{-m-1}{2m+1} a. \frac{m+1}{2m+1} a :: m. m + 1 :: 1. \frac{m+1}{m} :: 1. 1 + \frac{1}{m}$; donc &c.

Si $m = 2$, comme dans la parabole ordinaire, on aura $\frac{3}{5} a$ pour la distance de l'axe d'équilibre au centre de pesanteur de l'espace BAB,

Si $m = 3$, comme dans une des paraboles cubiques, on aura $\frac{4}{7} a$. Si $m = 4$, cette distance sera $= \frac{5}{9} a$.

FIG. 30. Mais si $m = \frac{1}{2}$, alors l'axe de la parabole devient la tangente au sommet, on aura $\frac{3}{4} a$ pour le bras de l'espace concave ABT sur l'axe d'équilibre AD. Si $m = \frac{1}{3}$, on aura $\frac{4}{5} a$, & si $m = \frac{1}{4}$, la distance cherchée sera $= \frac{5}{6} a$. Il en est ainsi des autres.

Si les ordonnées ne sont pas perpendiculaires à l'axe, qui est en ce cas un diametre, alors cette ligne n'est pas le bras de la figure: mais comme la ligne qui passe par le centre de pesanteur est parallele aux lignes du sommet & de la base, c'est-à-dire à l'axe d'équilibre & à la base qu'on suppose paralleles, il est évident qu'elles coupent toutes celles qui sont comprises entre ces deux-là en même raison, & ainsi le diametre est toûjours coupé en même proportion que la perpendiculaire sur la base, par conséquent il n'y a aucune difficulté à trouver le centre de pesanteur de ces figures.

PROP. IX.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

122. TROUVER *le centre de pesanteur d'un espace renfermé par une demi parabole.*

Les mêmes choses étant posées on déterminera 1°. le bras de cet espace sur AT que l'on a trouvé par le problême précédent $= \frac{m+1}{2m+1}a$. 2°. on cherchera son bras sur l'axe AD en cette sorte. FIG. 16

On aura pour la différentielle des poids $y\,dx$: mais parce que le centre de pesanteur de toutes les paralleles qui remplissent cet espace, les divise par le milieu, on peut exprimer le bras indéterminé de cette figure par $\frac{1}{2}y$, ainsi la différentielle des momens sera $\frac{yy\,dx}{2} = \frac{x^{\frac{2}{m}}\,dx}{2}$ à cause de la parabole ; dont l'intégrale $= \frac{m}{2m+4}x^{\frac{2}{m}+1}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{m}{m+1}x^{\frac{1}{m}+1}$, donne $\frac{m+1}{2m+4}x^{\frac{1}{m}} = \frac{m+1}{2m+4}y$ pour le bras indéterminé de la figure APM sur AD, & $\frac{m+1}{2m+4}r$ pour celui de la figure entiere ABD, en nommant la plus grande des ordonnées r. Menant donc par l'extremité de ces deux bras des lignes qui leurs soient paralleles, le point où elles s'entre-coupent est le centre de pesanteur de cet espace.

Si $m = 2$ comme dans la parabole ordinaire, on aura $\frac{3}{5}a$ pour le bras sur AT, & $\frac{3}{8}r$ pour le bras sur AD.

Si $m = 3$ comme dans une des paraboles cubiques, le bras sur AT sera $\frac{4}{7}a$, & sur AD $\frac{2}{5}r$.

Si $m = 4$ comme dans la parabole quarrée-quarrée, le bras sur AT sera $\frac{5}{9}a$, & sur AD $\frac{5}{12}r$.

Si $m = 5$ comme dans la parabole ſur-ſolide, le bras ſur AT ſera $\frac{6}{11}a$, & ſur $AD\ \frac{3}{7}r$.

Si $m = \frac{1}{2}$ comme dans le complement de la parabole ſimple, on aura $\frac{3}{4}a$ pour le bras ſur AD, & $\frac{3}{10}r$ ſur AT.

Si $m = \frac{1}{3}$ comme dans le complement de la parabole cubique, le bras ſur AD ſera $\frac{4}{5}a$, & ſur AT, $\frac{2}{7}r$.

Si $m = \frac{1}{4}$ comme dans le complement de la parabole du 4e degré, le bras ſur AD ſera $\frac{5}{6}a$, & ſur AT, $\frac{5}{18}r$.

Si $m = \frac{1}{5}$ comme dans le complement de la parabole ſur-ſolide le bras ſur AD ſera $\frac{6}{7}a$, & ſur $AT\ \frac{3}{11}r$; &c.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

123. TROUVER *le centre de peſanteur d'un eſpace renfermé par une hyperbole & par ſes aſymptotes.*

FIG. 13. Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art.* 37. on aura $x^{-1}dx =$ à la différentielle des poids, & multipliant par $x = CP$ qui eſt le bras indéterminé de la figure par rapport à l'axe d'équilibre CE, on aura $x^{-1+1}dx =$ à la différentielle des momens, dont l'intégrale $= \frac{x}{1}$, laquelle étant diviſée par la ſomme des poids $= \frac{xy}{0}$ qui eſt infinie, donne pour ſon bras ſur CE une valeur infiniment petite. Quelques auteurs ajoûtent *ou nulle*, & par conſéquent cet eſpace n'a point de centre de peſanteur; ce qui ne paroît pas vrai, parce que cet infiniment petit eſt un dx qui a quelque valeur. En effet l'aſymptote étant infinie, ſon poids peut contrepeſer le fini.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

124. TROUVER *généralement le centre de peſanteur de ces eſpaces, de quelque degré que ſoit l'hyperbole.*

Soit $y^m = x$ qui exprime la nature de toutes les hyperboles à l'infini par rapport à leurs asymptotes, m marquant un nombre négatif entier ou rompu. On aura pour la différentielle des poids* $x^{\frac{1}{m}} dx$, & pour celle des momens $x^{\frac{1}{m}+1} dx$, dont l'intégrale $= \frac{m}{2m+1} x^{\frac{1}{m}+2}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{m}{m+1} x^{\frac{1}{m}+1}$, donne $\frac{m+1}{2m+1} x$ pour la distance du centre de pesanteur de l'espace indéterminé de l'hyperbole, à l'axe d'équilibre passant par le point C parallele à la base BA, & $\frac{m+1}{2m+1} a$ pour celle de l'espace entier : D'où l'on peut tirer la même conclusion que dans la parabole *art.* 121. * *Art.* 38.

Si $m = -1$ comme dans l'hyperbole ordinaire, on trouvera de même que dans l'article précedent pour le bras sur CE une valeur infiniment petite.

Si $m = -2$ comme dans une des hyperboles cubiques, on trouvera $\frac{1}{3} a$ pour la distance cherchée, &c.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

125. TROUVER *le centre de pesanteur de la moitié de ces espaces hyperboliques* ECBAMF.

FIG. 74.

Les mêmes choses étant posées; on déterminera 1°. le bras sur CE que l'on vient de trouver par le problême précédent $\frac{m+1}{2m+1} a$. 2°. on cherchera le bras sur CB en cette sorte. On aura pour la différentielle des poids, $y\,dx$; mais parce que le centre de pesanteur de toutes les paralleles PM qui remplissent cet espace, les divise par le milieu, leur bras sera $\frac{1}{2} y$, & ainsi la différentielle des momens sera $\frac{yy\,dx}{2} = \frac{x^{\frac{2}{m}} dx}{2}$ à cause de l'hyperbole, dont l'inté-

grale $= \frac{m}{2m+4} x^{\frac{1}{m}+1}$ laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{m}{m+1} x^{\frac{1}{m}+1}$, donne $\frac{m+1}{2m+4} x^{\frac{1}{m}} = \frac{m+1}{2m+4} y$ pour le bras sur *C B* de l'espace indéterminé *E C P M F*, & $\frac{m+1}{2m+4} b$ pour celui de l'espace entier en supposant $AB = b$. Menant donc par l'extrémité de ces bras, des lignes qui leur soient paralleles, le point d'intersection sera le centre de pesanteur cherché.

Si $m = -3$, on trouvera pour le bras sur *CE*, $\frac{2}{5} a$; & sur *C B*, *b*.

Si $m = -4$, le bras sur *C E* sera $\frac{3}{7} a$, & sur *C B*, $\frac{3}{4} b$, il en est ainsi des autres.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

126. TROUVER *le centre de pesanteur de l'espace compris entre la courbe* A M B *& la droite* A B.

Fig. 26.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 51. on déterminera 1°. le bras de cet espace par rapport à l'axe d'equilibre *A E* en cette sorte. La différentielle des poids $= \frac{\overline{a-x} \times x^{\frac{m}{n}} dx}{a^{\frac{m}{n}}}$, & multipliant par x (*AP*) on aura pour celle des momens $\frac{\overline{a-x} \times x^{\frac{m}{n}+1} dx}{a^{\frac{m}{n}}}$, dont l'intégrale $= \frac{nax^{\frac{m}{n}+2}}{\overline{m+2n}\, a^{\frac{m}{n}}} - \frac{nx^{\frac{m}{n}+3}}{\overline{m+3n}\, a^{\frac{m}{n}}} = \frac{\overline{mn+3nn}\, ax^{\frac{m}{n}+2} \overline{-mn-2nn}\, x^{\frac{m}{n}+3}}{\overline{mm+5mn+6nn}\, a^{\frac{m}{n}}}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{nax^{\frac{m}{n}+1}}{\overline{m+n}\, a^{\frac{m}{n}}} - \frac{nx^{\frac{m}{n}+2}}{\overline{m+2n}\, a^{\frac{m}{n}}} =$

$$\frac{\overline{mn - 2nn}\, a x^{\frac{m}{n}+1} - \overline{mn - nn}\, x^{\frac{m}{n}+2}}{\overline{mm + 3mn + 2nn}\, a^{\frac{m}{n}}}$$, donnera

$$\frac{\overline{m^3 + 6mmn + 11mnn + 6n^3}\, a x - \overline{m^3 - 5mmn - 8mnn - 4n^3}\, x x}{\overline{m^3 + 7mmn + 16mnn + 12n^3}\, a - \overline{m^3 - 6mmn - 11mnn - 6n^3}\, x}$$

$= \frac{\overline{m+n}}{m+3n} \times \frac{\overline{m+3n}\, x a - \overline{m - 2n}\, x x}{\overline{m+3n}\, x a - \overline{m - n}\, x x}$ pour le bras de l'espace indéterminé *APM* sur *AE*, & $\frac{mm + 3mn + 2nn}{mm + 5mn + 6nn}\, a$ $= \frac{m+n}{m+3n}\, a$ pour celui de l'espace entier, parce que *P* en *B*, x devient $= a$.

2°. On déterminera le bras de cet espace sur l'axe *AB*, ce qui se fait ainsi.

Le centre de pesanteur de toutes les ordonnées *PM* qui remplissent l'espace, les divisant par le milieu, leur bras commun se peut exprimer par $\frac{1}{2}y$; ainsi la différentielle des momens sera $\frac{yydx}{2} = \frac{aax^{\frac{2m}{n}}dx - 2ax^{\frac{2m}{n}+1}dx + x^{\frac{2m}{n}+2}dx}{2a^{\frac{2m}{n}}}$

à cause de la courbe dont l'intégrale $= \frac{naax^{\frac{2m}{n}+1}}{\overline{4m + 2n}\, a^{\frac{2m}{n}}} -$

$$\frac{nax^{\frac{2m}{n}+2}}{\overline{2m + 2n}\, a^{\frac{2m}{n}}} + \frac{nx^{\frac{2m}{n}+3}}{\overline{4m + 6n}\, a^{\frac{2m}{n}}} = \frac{\overline{2mmn + 5mnn + 3n^3}\, aax^{\frac{2m}{n}+1} - \overline{4mmn - 8mnn - 3n^3}\, ax^{\frac{2m}{n}+2} \overline{+ 2mmn + 3mnn + n^3}\, x^{\frac{2m}{n}+3}}{\overline{8m^3 + 24mmn + 22mnn + 6n^3}\, a^{\frac{2m}{n}}}$$

laquelle grandeur étant divisée par la somme des poids $=$ $\frac{\overline{mn + 2nn}\, ax^{\frac{m}{n}+1} - \overline{mn - nn}\, x^{\frac{m}{n}+2}}{\overline{mm + 3mn + 2nn}\, a^{\frac{m}{n}}}$ donnera la valeur du bras de l'espace indéterminé *APM* par rapport à l'axe d'équilibre *AB*, d'où l'on tirera pour celle du bras de l'es-

pace entier *AMBA* $\frac{mmn + 3mnn + 2n^3}{8m^3 + 24mmn + 22mnn + 6n^3} a = \frac{m + 2n \times an^2}{8m^2 + 16mn + 6n^2}$ à cause du diviseur connu $m+n$ de la premiere fraction, parce qu'alors x devient $= a$. Menant donc par l'extremité de ces bras des lignes qui leur soient paralleles, le point d'intersection sera le centre de pesanteur que l'on demande.

Si $m = 2$, $n = 1$; on aura $\frac{4}{5} a$ pour le bras sur *AE*, & $\frac{8}{15} a$ pour le bras sur *AB*.

On pourroit trouver avec la même facilité le centre de pesanteur des deux autres espaces renfermez, par les courbes *AND*, & *AQB*.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

127. TROUVER *le centre de pesanteur d'un prisme.*

Il est évident que le centre de pesanteur de ce Solide se trouve au milieu de la ligne qui passe par le centre de pesanteur des bases, puisqu'il est composé d'une infinité de plans paralleles & égaux à ses bases. Il en est de même du cylindre; mais on ne laissera pas cependant que de le chercher par la regle.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

128. TROUVER *le centre de pesanteur d'un cylindre.*

FIG. 8. On voit d'abord que ce centre doit se trouver sur l'axe *EF*. Soit donc cet axe $= a$, sa partie $EP = x$, & $\frac{cr}{2}$ un des cercles dont le cylindre est composé, on aura $\frac{crdx}{2}$ pour la differentielle des poids, & $\frac{crxdx}{2}$ pour celle des momens par rapport à l'axe d'équilibre *AD*, dont l'inté-

grale $= \frac{crxx}{4}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{crx}{2}$, donne $\frac{x}{2}$ pour le bras de la portion qui a pour hauteur EP, & $\frac{a}{2}$ pour celui du cylindre entier parce qu'en F, x devient $= a$.

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

129. TROUVER *le centre de pesanteur d'une pyramide.*

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 59. on aura $\frac{bcxxdx}{2aa}$ pour la différentielle des poids, & $\frac{bcx^3dx}{2aa}$ pour celle des momens par rapport à un axe d'équilibre passant par A parallelement à BD, dont l'intégrale $= \frac{bcx^4}{8aa}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{bcx^3}{6aa}$, donne $\frac{3}{4}x$ pour la distance du centre de pesanteur de la partie de la pyramide qui a pour hauteur AP, à l'axe de balancement qui passe par le sommet A, d'où l'on tire $\frac{3}{4}a$ pour celle de la pyramide entiere, parce qu'en B, x devient $= a$. FIG. 8.

On fera les mêmes raisonnemens pour le cone, puisque ce n'est qu'une pyramide d'une infinité de côtez.

PROPOSITION XVII.

PROBLEME.

130. TROUVER *le centre de pesanteur d'un sphere par rapport à son axe d'équilibre* AK *passant par* A *parallelement à* B C.

Il est évident que ce centre doit se trouver sur le diametre AD perpendiculaire à l'axe de balancement AK, & qu'il n'est pas différent de celui de la sphere ; mais on FIG. 10.

ne laissera pas cependant que d'y appliquer la méthode, à cause des parties ausquelles elle s'étend.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 66. on aura pour la différentielle des poids $cxdx - \frac{cxxdx}{2r}$, & pour celle des momens $cxxdx - \frac{cx^3dx}{2r}$, dont l'intégrale $= \frac{cx^3}{3} - \frac{cx^4}{8r}$, laquelle étant divisée par $\frac{cxx}{2} - \frac{cx^3}{6r} =$ à la somme des poids, donne $\frac{8crx^3 - 3cx^4}{12crxx - 4cx^3} = \frac{8rx - 3xx}{12r - 4x}$ pour la distance de l'axe de balancement AK au centre de pesanteur de la partie indéterminée de la sphere décrite par la révolution de la portion AMP autour de AC, laquelle devient $= r$ pour la sphére entiére, parce qu'en D, x devient $= 2r$; d'où l'on voit que le centre de pesanteur est le même que celui de la sphere.

Si l'on vouloit avoir le centre de pesanteur de la moitié de la sphére, on trouveroit comme auparavant $\frac{8rx - 3xx}{12r - 4x}$, ce qui donneroit $\frac{5}{8}r$ pour la distance cherchée sur un axe de balancement tel que AK, parce qu'en ce cas x devient $= r$.

De là il est facile d'avoir le centre de pesanteur d'un segment de sphere, & d'une de ses portions quelconque coupée par deux plans paralleles.

PROPOSITION XVIII.

PROBLEME.

131. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé* FIG. 30.
par la révolution de la parabole AMB *autour de son axe* AD.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 77. on aura pour la différentielle des poids $\frac{cxdx}{2r}$, & pour celle des momens autour de l'axe d'équilibre AT, $\frac{cxxdx}{2r}$, dont l'intégrale $= \frac{cx^3}{6r}$, laquelle étant divisée par la somme des poids

poids $=\frac{cxx}{4r}$, donne $\frac{2}{3}x$ pour la distance cherchée de l'axe d'équilibre AT au centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de AMP autour de AD; & $\frac{2}{3}a$ pour celle du Solide entier, parce qu'en D, $x=a$.

PROPOSITION XIX,

PROBLEME.

132. TROUVER *généralement le centre de pesanteur de ces Solides, de quelque degré que soit la parabole.*

On aura * $\frac{cyydx}{2r}$ pour la différentielle des poids $=$ $\frac{cx^{\frac{2}{m}}dx}{2r}$ parce que $yy=x^{\frac{2}{m}}$, & $\frac{cx^{\frac{2}{m}+1}dx}{2r}$ pour celle des momens, dont l'intégrale $=\frac{mcx^{\frac{2}{m}+2}}{4m+4r}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $=\frac{mcx^{\frac{2}{m}+1}}{2m+4r}$, il viendra $\frac{m+2}{2m+2}x$ pour la distance cherchée dans le Solide partial, & $\frac{m+2}{2m+2}a$ dans le total, parce qu'alors $x=a$. * Art. 73.

Si $m=2$, on aura comme dans la parabole ordinaire $\frac{2}{3}a$ si $m=3$, on aura $\frac{5}{8}a$, &c.

PROPOSITION XX.

PROBLEME.

133. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de l'espace parabolique* AMBD *autour de* BT *parallele à l'axe* AD. FIG. 10

Les mêmes choses étant posées que dans l'*article* 80, on aura pour la différentielle des poids $\frac{2crx^{\frac{1}{2}}dx - cxdx}{2r}$, & multipliant cette grandeur par x bras du levier par rap-

M

port à l'axe de balancement passant par AT, il viendra $\frac{2crx^{\frac{1}{2}+1}dx - cxxdx}{2r}$ = à la différentielle des momens ; dont l'intégrale $= \frac{2crx^{\frac{1}{2}+2}}{5r} - \frac{cx^3}{4r} = \frac{12crx^{\frac{1}{2}+2} - 5cx^3}{30r}$; laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{8crx^{\frac{1}{2}+1} - 3cxx}{12r}$, donne pour quotient $\frac{24rx^{\frac{1}{2}+1} - 10xx}{40rx^{\frac{1}{2}} - 15x}$ $= \frac{24rx - 10yx}{40r - 15y}$ qui est la distance du plan d'équilibre passant par AT au centre de pesanteur de la portion de Solide décrite par APM, d'où l'on tire $\frac{14}{25}a$ pour celle du Solide entier, parceque x devenant a, y devient x.

PROPOSITION XXI.

PROBLEME.

Fig. 31. 134. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution du même espace autour de la tangente au sommet* AT.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*article* 82 : on aura $\frac{cy^{\frac{3}{2}}dy}{r}$ pour la différentielle des poids, & multipliant par $\frac{x}{2}$ ou par sa valeur $\frac{y^{\frac{1}{2}}}{2}$, on aura $\frac{cyydy}{2r}$ = à la différentielle des momens autour de l'axe d'équilibre AD, dont l'intégrale $= \frac{cy^3}{6r}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{2cy^{\frac{1}{2}}}{5r}$, donne $\frac{5}{12}y^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{12}x$ pour la distance du point A au centre de pesanteur de la portion de Solide formée par AMQ, ce qui donne $\frac{5}{12}a$ pour celle du Solide entier, parce qu'en T, x devient $= a$.

PROPOSITION XXII.

PROBLEME.

135. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de la parabole autour de sa base* B D. FIG. 3

Les mêmes choses étant posées que dans *l'article* 84. on aura pour la différentielle des poids $\frac{2cryydy - 2cy^4dy}{r}$ Et parce que le centre de pesanteur de toutes les superficies cylindriques décrites par les *P M* les divise par le milieu, on peut exprimer leur bras commun par rapport à l'axe d'équilibre *A D*, par $\frac{1}{2}y$, on aura donc pour la différentielle des momens, $\frac{cry^3dy - cy^5dy}{r}$, dont l'intégrale $= \frac{cry^4}{4r} - \frac{cy^6}{6r} = \frac{3cry^4 - 2cy^6}{12r}$, laquelle étant divisé par la somme des poids $= \frac{10cry^3 - 6cy^5}{15r}$, donne pour le bras de la portion indéterminée du Solide sur *A D*, $\frac{15ry - 10y^3}{40r - 24yy}$, d'où l'on tire pour celui du Solide entier $\frac{5}{16}a$, parce que x devient $= r$, & $y = a$.

Si tous ces Solides n'étoient formez que par la révolution imparfaite de la parabole, il seroit facile d'avoir aussi leur centre de pesanteur. On en va donner un exemple dans le problême suivant.

PROPOSITION XXIII.

PROBLEME.

136. TROUVER *le centre de pesanteur d'une portion quelconque de Solide parabolique coupé par un ou plusieurs plans passans par l'axe* A D *autour duquel il a été formé.* FIG. 3

Il est manifeste que ces Solides seront composez de secteurs qui sont en même raison que les cercles qui composent le Solide entier; ainsi leur bras commun par rapport

à la tangente au ſommet AT que l'on regarde comme l'axe d'équilibre, ſera le même que celui du ſolide entier

* Art. 132. que l'on a trouvé* $\frac{m+2}{2m+2}a$. Car l'on voit évidemment que le centre de peſanteur de ces Solides doit ſe trouver dans le plan qui paſſant par l'axe AD diviſe le ſecteur de la baſe en deux parties égales, puiſque ce plan coupera auſſi par la moitié tous les ſecteurs qui forment le Solide. Il ne reſte donc qu'à déterminer leur bras ſur l'axe AD. Ce qui ſe fait ainſi.

* Art. 79. Nommant l'arc du Secteur de la baſe, c; ſon rayon, r; on aura* $\frac{cyydx}{2r}$ pour la différentielle des poids. Mais on a

* Art. 118. démontré* que le centre de peſanteur d'un ſecteur de cercle eſt tellement ſitué ſur le rayon qui le diviſe par le milieu, que ſa diſtance du centre du cercle eſt aux deux tiers du rayon, comme la corde eſt à l'arc, on peut donc exprimer leur bras commun par $\frac{2ay}{3c}$, en nommant la corde, a; & ainſi on aura pour la différentielle des momens $\frac{ay^3dx}{3r} = \frac{ax^{\frac{3}{m}}dx}{3r}$ à cauſe de la parabole, dont l'intégrale $= \frac{max^{\frac{3}{m}+1}}{\overline{3m+9}\,r}$, laquelle étant diviſée par la ſomme des poids $= \frac{mcx^{\frac{2}{m}+1}}{\overline{2m+4}\,r}$, donnera $\frac{\overline{2m+4}\,ax^{\frac{1}{m}}}{\overline{3m+9}\,c} = \frac{\overline{2m+4}\,ay}{\overline{3m+9}\,c}$ pour le bras ſur AD de la portion indéterminée du Solide formée par l'eſpace AMP, & pour celui du Solide entier $\frac{\overline{2m+4}\,ar}{\overline{3m+9}\,c}$, parce qu'alors y devient $=r$. Menant donc par l'extremité de ces bras des plans qui leur ſoient perpendiculaires, le point d'interſection de ces trois plans ſera le centre de peſanteur du ſolide.

Si $m=2$ comme dans la parabole ordinaire, on aura $\frac{3}{5}a$ pour le bras ſur AT, & $\frac{8ar}{15c}$ pour le bras ſur AD.

Si $m = 3$ comme dans une des paraboles cubiques, le bras sur AT sera $\frac{5}{8}a$, & sur AD $\frac{5ar}{9c}$.

Si $m = \frac{3}{2}$ comme dans l'autre parabole cubique, on aura sur AT, $\frac{7}{10}a$, & sur AD, $\frac{14ar}{27c}$ &c.

On trouvera avec la même facilité le centre de pesanteur des portions des autres Solides, soit qu'on les considere composés de secteurs de cercles, soit qu'on les regarde composés de portions de surfaces cylindriques, de sorte que l'on ne s'y arrêtera pas.

PROPOSITION XXIV.

PROBLEME.

137. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de la parabole autour d'un de ses diametres, c'est-à-dire lorsque les ordonées ne font pas un angle droit avec ce diametre.* FIG. [illegible]

Les mêmes choses étant posées que dans l'*article* 86. on aura $\frac{crx}{2b}$ = à la surface conique décrite par MP, & menant sur le diametre AD prolongé les perpendiculaires BK, MI, il est clair que DK & PI feront les axes des cones droits décrits dans le mouvement de la figure par les triangles rectangles BKD, MIP. Mais on a démontré* que les centres de pesanteur des surfaces coniques se trouvent aux deux tiers de leur axe; nommant donc DK, a; on aura à cause des triangles semblables & à cause de la parabole, $PI = a\sqrt{\frac{x}{b}}$, donc $\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{x}{b}}$ est la distance du centre de pesanteur de la surface conique décrite par PM, du point P, & $\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{x}{b}} + x$ pour celle du sommet A. Multipliant donc $\frac{acrxdx}{2bb}$, par $\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{x}{b}} + x$, on aura $\frac{aacrx^{\frac{3}{2}}dx}{\frac{3}{2}+1 \cdot 3b} + \frac{acrxxdx}{2bb} =$ * Art. [illegible]

à la différentielle des momens, dont l'intégrale $= \frac{2aacrx^{\frac{5}{2}}}{15b^{\frac{3}{2}+2}} + \frac{acrx^3}{6bb}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{acrxx}{4bb}$, donnera $\frac{8}{15} a \sqrt{\frac{x}{b}} + \frac{2}{3}x$ pour la distance du sommet *A* au centre de pesanteur de la partie du Solide formée par *AMP*, & $\frac{8}{15} a + \frac{2}{3} b$ pour celle du Solide entier, parce qu'alors x devient $= b$.

PROPOSITION XXVI.

PROBLEME.

Fig. 32. 138. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution du même espace autour de* A T *tangente au sommet.*

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 88. on aura $\frac{cxy}{b} = \frac{cy^{\frac{3}{2}}}{bb}$ valeur de la surface cylindrique décrite par *P M*. Mais le centre de pesanteur des surfaces cylindriques divise leur axe par le milieu: nommant donc *DH*, *e*; on aura $PQ = \frac{ey}{b}$, & $\frac{x}{2} + \frac{ey}{b}$ sera le bras de la surface cylindrique par rapport à l'axe d'équilibre *AH*: ainsi multipliant la différentielle des poids $= \frac{cry^{\frac{3}{2}}dy}{bb}$ par $\frac{x}{2} + \frac{ey}{b}$, & mettant pour x sa valeur $y^{\frac{2}{2}}$, on aura pour celle des momens $\frac{cryydy}{2bb} + \frac{cery^{\frac{3}{2}+1}dy}{b3}$, dont l'intégrale $= \frac{1cry^3}{6bb} + \frac{2cery^{\frac{3}{2}+2}}{7bb}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{2cry^{\frac{3}{2}+1}}{3bb}$, donne $\frac{1}{12}y^{\frac{1}{2}} + \frac{5ey}{7b}$ pour le bras de la portion de Solide décrite par la révolution de l'espace *A P M*, &

$\frac{5}{12}a + \frac{5}{7}e$ pour celui du Solide entier, parce qu'alors x devient $= a$, & $y = b$.

PROPOSITION XXVI.

PROBLEME.

139. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de l'hyperbole autour d'une de ses asymptotes* CE. FIG. 1[illegible]

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 90. on aura pour la différentielle des poids $acdx$. Et parce que le centre de pesanteur des surfaces cylindriques qui composent le Solide, les divise par le milieu, on peut exprimer leur bras commun par $\frac{1}{2}y$; & ainsi la différentielle des momens sera $= \frac{acydx}{2}$; mais $y = \frac{ar}{x}$, mettant donc cette valeur dans $acydx$, il viendra $\frac{aacrdx}{2x} = \frac{aacrx^{-1}dx}{2}$ dont l'intégrale $= \frac{aacr}{2\,0}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= acx$, donnera $\frac{ar}{2x0}$ pour la distance de l'axe d'équilibre CB au centre de pesanteur de la portion indéterminée du Solide, & $\frac{a}{2\,0}$ pour celle du Solide entier, parce que x devient r. Ce qui fait connoître que ce Solide n'a point de centre de pesanteur, puisqu'on trouve pour la valeur de son bras une grandeur infinie.

PROPOSITION XXVII.

PROBLEME.

140. TROUVER *généralement le centre de pesanteur de ce Solide, de quelque dégré que soit l'hyperbole.*

On aura* $\frac{cx^{\frac{1}{m}+1}dx}{e}$ = à la différentielle des poids; & *Art. 93.

multipliant par $\frac{y}{2}$ ou par sa valeur $\frac{x^{\frac{1}{m}}}{2}$, on aura $\frac{cx^{\frac{2}{m}+1}dx}{2r}$ = à celle des momens, dont l'intégrale = $\frac{mcx^{\frac{2}{m}+2}}{4m+4r}$, laquelle étant divisée par $\frac{mcxxy}{2m+1r}$ = à la somme des poids, donnera $\frac{2m+1}{4m+4}y$ pour la distance de CB au centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de $ECPMF$ autour de CE, ce qui donnera $\frac{2m+1}{4m+4}a$ (M. Parent dit que $ax\frac{1-2m}{4-4m}$ est une expression plus usitée) pour celle du Solide entier, parce qu'alors y se trouve = a: ce qu'il falloit &c.

PROPOSITION XXVIII.

PROBLEME.

141. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé* FIG. 15. *par la révolution de la même hyperbole autour de l'autre asymptote* CB

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 92. on aura pour la différentielle des poids $\frac{aacrx^{-2}dx}{2}$ & multipliant par le bras = x, on aura pour celle des momens par rapport à CE que l'on regarde comme l'axe de balancement $\frac{aacrx^{-1}dx}{2}$, dont l'intégrale = $\frac{aacr}{2\,0}$, laquelle étant divisée par la somme des poids, donnera encore une valeur infinie (le même reprend ceci en disant que cette valeur est celle de la distance à laquelle il faut considérer cette figure suspendue de l'autre côté de l'appui C sur le levier CB, il n'en dit pas d'avantage) & par conséquent ce Solide n'a point de centre de pesanteur.

PROPOSITION XXIX.

PROBLEME.

142. TROUVER *généralement le centre de pesanteur de ce Solide formé autour de* CB. FIG. 13.

On aura * $\frac{mcy^{m+1}dy}{2r}$ = à la différentielle des poids, * Art. 91.
& multipliant par x ou par sa valeur $y^{\frac{m}{r}}$, on aura $\frac{mcy^{2m+1}dy}{2r}$ = à celle des momens, dont l'intégrale = $\frac{mcy^{2m+2}}{4m+4r} = \frac{mcyyxx}{4m+4r}$, laquelle étant divisée par la somme des poids = $\frac{mcxyy}{2m+4r}$, donnera (le même dit qu'au lieu de $\frac{m+1}{2m+2}x$, il aimeroit mieux $\frac{2-m}{2-2m}x$ à cause qu'il s'agit d'hyperboles où m est négatif) $\frac{m+2}{2m+2}x$ pour la distance de CE au centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de l'espace $ECPMF$ autour de CB, & $\frac{m+2}{2m+2}a$ pour celle du Solide entier, parce qu'alors x devient $= a$.

Si l'on vouloit donner à l'exposant m le signe négatif qu'on lui suppose, la formule deviendroit $\frac{2-m}{2-2m}a$, & il seroit facile de voir quels seroient les Solides qui auroient un centre de pesanteur, & quels seroient ceux qui n'en auroient pas, en supposant m égale, moindre ou plus grande que quelque nombre positif que l'on voudroit.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME.

143. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide for-* FIG. 13.

mé par la révolution de l'espace hyperbolique A M B D *autour de l'axe* A D.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 94. on aura pour la différentielle des poids $\frac{crxxdx + 2bcrxdx}{2aa + 4ab}$, & pour celle des momens par rapport à l'axe d'équilibre passant par le sommet A perpendiculairement sur AD $\frac{crx^3dx + 2bcrxxdx}{2aa + 4ab}$ dont l'intégrale $= \frac{crx^4}{8aa + 16ab} + \frac{bcrx^3}{3aa + 6ab} = \frac{3crx^4 + 8bcrx^3}{24aa + 48ab}$, laquelle étant divisée par $\frac{crx^3 + 3bcrxx}{6aa + 12ab} = \frac{4crx^3 + 12bcrxx}{24aa + 48ab}$ somme des poids, donnera $\frac{3xx + 8bx}{4x + 12b}$ pour la distance de l'axe d'équilibre au centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de l'espace indéterminé AMP autour de AD, & $\frac{3aa + 8ab}{4a + 12b}$ pour celle du Solide entier; parce qu'alors x devient $= a$. D'où il est évident que le centre de pesanteur de ce conoïde hyperbolique se trouve sur l'axe de telle sorte que la partie prise depuis le sommet jusqu'au centre de pesanteur est à l'axe entier comme $3a + 8b$ est à $4a + 12b$.

PROPOSITION XXXI.

PROBLEME.

FIG. 34. 144. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de l'espace hyperbolique* C A M B D *autour du demi-axe conjugué* C D.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 96. on aura pour la différentielle des poids $\frac{aacxxdx + aabbcdx}{2bbr}$, & pour celle des momens par rapport à AC que l'on regarde comme l'axe de balancement $\frac{aacx^3dx + aabbcxdx}{2bbr}$, dont l'intégrale $= \frac{aacx^4}{8bbr} + \frac{aabbcxx}{4bbr}$, & remettant pour aa sa valeur $\frac{bbyy}{xx + bb}$, il viendra $\frac{cx^4yy + 2bbcxxyy}{8rxx + 8bbr}$; ce qui étant

divisé par la somme des poids $= \frac{cx^3yy + 3bbcxyy}{6rxx + 6bbr}$, donne $\frac{3x^3 + 6bbx}{4xx + 12bb}$ pour la distance de l'axe d'équilibre *AC* au centre de pesanteur du Solide formé par l'espace *ACPM*, & $\frac{9}{16}b$ pour celle du Solide entier, parce qu'alors x devient $= b$.

Donc le centre de pesanteur de ce Solide est tellement situé sur l'axe, que la partie depuis le point *C* jusqu'au centre de pesanteur est à l'axe entier comme 9 est à 16.

PROPOSITION XXXII.

PROBLEME.

145. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de la demi-ellipse* ABD *autour de l'axe* AD, *par rapport au plan d'équilibre passant par le point* A *perpendiculairement sur* AD. FIG. 35.

On voit d'abord que le centre de pesanteur de ce Solide doit se trouver sur l'axe *AD*, & mêmes qu'il n'est pas different de celui de la figure ; on ne laissera pas cependant que d'y appliquer la méthode.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 98. on aura pour la différentielle des poids $\frac{cyydx}{2r}$. Mais à cause de l'ellipse en nommant *AP*, x; $yy.\ 2ax - xx :: rr.\ aa$. Donc $yy = \frac{2arrx - rrxx}{aa}$, mettant donc pour yy cette valeur dans $\frac{cyydx}{2r}$, on aura $\frac{2acrxdx - crxxdx}{2aa}$, & multipliant par x, la différentielle des momens sera $\frac{2acrxxdx - crx^3dx}{2aa}$ dont l'intégrale $= \frac{crx^3}{3a} - \frac{crx^4}{8aa} = \frac{8acrx^3 - 3crx^4}{24aa}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{12acrxx - 4crx^3}{24aa}$, donnera $\frac{8ax - 3xx}{12a - 4x}$ pour la distance du plan d'équilibre au centre de pesanteur du Solide décrit par la révolution de *AMP* autour de *AD* ; & a pour celle du Solide ellipti-

que entier, parce qu'alors x devient $= 2a$. Ce qui fait connoître que ce centre de pesanteur est le centre même de la figure.

Si l'on vouloit avoir le centre de pesanteur de la moitié du Solide elliptique, pour lors x deviendroit $= a$, & on trouveroit $\frac{3}{8}a$ pour la distance cherchée du plan de balancement passant par le point A.

PROPOSITION XXXIII.

PROBLEME.

146. TROUVER *le centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de la Courbe* A M B *autour de l'axe* A B. FIG. 21.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 105. on aura pour la différentielle des poids $\frac{aacx^4dx - 2acx^5dx + cx^6dx}{2a^4r}$, & multipliant par x (AP) on aura pour celle des momens par rapport à l'axe de balancement AE $\frac{aacx^5dx - 2acx^6dx + cx^7dx}{2a^4r}$, dont l'intégrale $= \frac{cx^6}{12aar} - \frac{cx^7}{7a^3r} + \frac{cx^8}{16a^4r} = \frac{28aacx^6 - 48acx^7 + 21cx^8}{336a^4r}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{cx^5}{10aar} - \frac{cx^6}{6a^3r} + \frac{cx^7}{14a^4r} = \frac{21aacx^5 - 35acx^6 + 15cx^7}{210a^4r}$, le quotient donnera . . $\frac{140aax - 240axx + 105x^3}{168aa - 280ax + 120xx}$ pour la distance de l'axe de balancement AE au centre de pesanteur du Solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de AP, & $\frac{5}{8}a$ pour celle du Solide entier, parce qu'en B, x devient $= a$.

Si l'on vouloit avoir d'une maniere infiniment générale le centre de pesanteur de ce Solide, on trouveroit pour la distance cherchée $\frac{4m^3 + 12mmn + 11mnn + 3n^3}{4m^3 + 18mmn + 26mnn + 12n^3}a$. (à cause du diviseur commun $2m^2 + 5mn + 3n^2$) $= \frac{2m + n}{2m + 4n} \times a$. On n'en a pas mis le calcul, non parce qu'il renferme au-

une difficulté en lui-même, mais à cause de celle qu'on auroit à l'imprimer.

PROPOSITION XXXIV.

PROBLEME GENERALE.

147. *Le centre de pesanteur d'une figure quelconque plane ou Solide étant connu avec celui d'une de ses parties, trouver le centre de pesanteur du reste.* FIG. 49

Soit par exemple le Conoïde parabolique formé par la demi-révolution de la parabole *BAB* autour de l'axe *AD*, connoissant son centre de pesanteur, & celui de sa partie *MAM*, on demande le centre de pesanteur de la portion *BMMB*.

Il est évident que le centre de pesanteur de deux poids se trouve dans la ligne qui joint leurs centres de pesanteur particuliers, & cette ligne est tellement divisée que les distances de ce centre sont réciproquement proportionnelles aux poids. Soit donc *C* le centre de pesanteur de toute la figure, & *E* celui de la partie *MAM*, & soit supposé que le point *F* soit le centre cherché. Ayant nommé la distance *CE*, *a*; le poids *BMMB*, *m*; le poids *MAM*, *n*; on dira $m . n :: a . \frac{an}{m} = CF$ qui est la distance du centre de pesanteur qu'il falloit trouver.

On peut trouver par le moyen de ce problême le centre de pesanteur d'une infinité de figures : par exemple, si dans une parabole on inscrit un triangle, & dans un conoïde parabolique un cone, ou une autre figure quelconque dont on connoisse le centre de pesanteur, il est évident qu'ayant retranché les parties de leur tout, on connoîtra le centre de pesanteur du reste.

REMARQUE.

La découverte des centres de pesanteur sert à trouver

d'une maniere également belle & facile la valeur des surfaces & la dimension des Solides. Car on démontre que si une ligne ou une surface droite ou courbe se meut uniformement au tour d'un axe, la surface ou le Solide engendrez par ce mouvement, sont égaux à un parallelogramme ou à un parallelépipede qui a pour hauteur la circonférence décrite par le centre de pesanteur, & pour base une ligne ou un parallélogramme égal à la ligne ou à la surface donnée.

SECTION QUATRIÉME.

DES CENTRES DE PERCUSSION, ET D'OSCILLATION.

LE centre de percussion d'un corps en mouvement est un point dans lequel toutes les forces de ce corps sont considérées comme réünies, ensorte que s'il venoit à rencontrer par ce point un obstacle opposé à son mouvement, il le frappât avec le plus grand effort que par quelque autre point que ce soit. Il est nécessaire pour cet effet que les parties dont ce corps est composé changent tellement leur disposition à se mouvoir, qu'elles partagent leur quantité de mouvement, non pas comme dans le centre de pesanteur en raison des espaces parcourus; mais en raison composée de leurs vîtesses & des distances de ce centre réciproquement proportionnelles à ces vîtesses; ou ce qui est la même chose, en des quantitez de mouvement égales de part & d'autre de ce point. Le centre de percussion est donc à l'égard des vîtesses ce que le centre de pesanteur est à l'égard des poids. Ainsi il y a cette différence que l'un est le centre des momens ou des efforts, & l'autre est le centre des poids. Or on a vû que pour avoir le centre de pesanteur d'un corps, il faut diviser la somme des momens par la somme des poids: Ainsi pour avoir le centre de percussion, il n'y a qu'à prendre le produit de la somme des momens par des lignes droites, égales ou proportionnelles aux espaces parcourus, ou à supposer que toutes les parties du corps en mouvement sont changées à

l'inſtant du choc en des poids proportionnels à leurs vîteſſes, & diviſer ce produit par la ſomme des momens. Mais pour avoir la ſomme des lignes proportionnelles aux eſpaces parcourus, il faut connoître le rapport des vîteſſes aux eſpaces, leſquelles ſont toûjours en même raiſon que les eſpaces parcourus en même tems.

On peut conſidére que les corps ſe meuvent ou parallélement à eux mêmes, ou à l'entour d'un point fixe ou d'un axe. S'ils ſe meuvent parallélement à eux mêmes, il eſt évident que le centre de percuſſion n'eſt point différent du centre de peſanteur. Car dans celui-ci, on conſidere les poids ſans vîteſſes, & dans celui-là on les conſidére avec les vîteſſes : or ſi on conçoit ce corps diviſé en une infinité de parties égales, leurs vîteſſes reſpectives ſeront auſſi égales, puiſque les eſpaces parcourus dans le même tems ſont égaux. Ainſi les momens ou la ſomme des forces de part & d'autre du centre de peſanteur ſera égale ; donc le centre de peſanteur de toutes ces parties eſt le centre d'équilibre de toutes les vîteſſes. Il eſt donc évident que tout corps mû parallelement à lui-même a un point commun pour le centre de percuſſion & le centre de peſanteur.

Mais ſi les corps ſe meuvent autour d'un point fixe, ou autour d'un axe, le centre de percuſſion eſt différent du centre de peſanteur. Car les parties dont le corps eſt composé étant inégalement diſtantes du point ou de l'axe de leur balancement, parcourent des eſpaces inégaux en des tems égaux : car toutes ces parties décrivent des arcs qui ſont en même raiſon que les diſtances de leur axe qui ſont inégales ; ainſi pour avoir le centre de percuſſion de ces corps, il faut trouver le rapport des vîteſſes avec les eſpaces parcourus.

REGLE GENERALE pour trouver les centres de percuſſion. On multipliera toutes les petites parties dont le corps eſt composé, que l'on regardera comme autant de poids, par les quarrez de leurs diſtances du point de ſuſpenſion, & diviſant ce produit par celui qui eſt fait de la

ſomme

somme de ces mêmes poids par la distance de leur centre commun de pesanteur, le quotient donnera le centre de percussion que l'on cherche.

Il est bon de remarquer 1°. que l'on suppose que la pesanteur d'un corps comparée à son mouvement est zero, quoique cela soit faux comme il est facile de le démontrer. 2°. Que quoique le centre de percussion se trouve dans le corps même, & que le choc se fasse dans un point de sa superficie, on ne laisse pas de déterminer en quel endroit de cette surface le choc se fait : car il est évident que ce point se trouve toûjours dans la direction du centre des forces dans l'instant du choc.

PROPOSITION L.

PROBLEME.

148. TROUVER *le centre de percussion d'une ligne suspendue par une de ses extremitez autour de laquelle on conçoit qu'elle se meut librement.* FIG. 37.

Soit la ligne *AB* suspenduë au point *A*. Si on la conçoit divisée en une infinité de petites parties égales, il est clair qu'elles décriront en tems égal des arcs de cercles concentriques, qui seront entr'eux comme les distances du point *A* qui sont leurs rayons : Mais les vîtesses avec lesquelles ces arcs sont parcourus sont proportionnelles à ces mêmes arcs, donc les vîtesses sont entr'elles comme les raïons ou les distances du point de suspention. Si donc on nomme la ligne *AB*, a; une de ses parties quelconques *AP*, x; donc $Pp = dx$; on aura xdx pour la différentielle des momens, laquelle étant multipliée par x qui répresente les vîtesses, donnera $xxdx$ pour la différentielle des efforts, dont l'intégrale $= \frac{x^3}{3}$, laquelle étant divisée par la somme des momens $= \frac{xx}{2}$, donnera $\frac{2}{3}x$ pour la distance du centre de percussion de la partie *AP*, & $\frac{2}{3}a$ pour celle de la ligne entiere, parce que x devient

$= a$. C'est à dire que si on divise la ligne ensorte que la toute soit à sa partie prise du point A jusqu'au centre de percussion, comme 3 est à 2, on aura ce qu'on cherche.

Il est évident que le centre de percussion de la ligne droite n'est pas différent du centre de pesanteur du triangle; puisque les momens ou les forces peuvent être exprimées par des droites qui remplissent un triangle.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

FIG. 38. 149. TROUVER *le centre de percussion d'un parallélogramme qu'on suppose se mouvoir autour d'un de ses côtez* AB.

On voit d'abord que ce centre doit se trouver sur la ligne EF qui le divise par le milieu. Ayant fait les mêmes raisonnemens que par rapport à la ligne droite, & nommé AB, b; EP, x; on aura pour la différentielle des momens $bxdx$, & pour celle des efforts $bxxdx$, dont l'intégrale $= \frac{bx^3}{3}$, laquelle étant divisée par $\frac{bxx}{2}$ somme des momens, donnera $\frac{2}{3}x$ pour la distance de l'axe de balancement AB au centre de percussion de la partie $ABMM$, & $\frac{2}{3}a$ pour celle du parallélogramme entier, qui n'est pas différente de celle de la ligne droite.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

FIG. 39. 150. TROUVER *le centre de percussion d'un triangle isoscele suspendu par son sommet par lequel soit imaginée une droite* EF *parallele à sa base autour de laquelle il est agité.*

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 112. on aura pour la différentielle des momens $\frac{bxxdx}{a}$, & pour

celle des forces $\frac{bx^3dx}{a}$, dont l'intégrale $= \frac{bx^4}{4a}$, laquelle étant divisée par la somme des momens $= \frac{bx^3}{3a}$, donnera $\frac{3}{4}x$, & de-là $\frac{3}{4}a$ pour la distance de l'axe de balancement EF au centre de percussion du triangle, laquelle n'est pas différente de celle du centre de pesanteur de la parabole ordinaire par rapport à sa tangente au sommet : car les forces peuvent être exprimées par des droites qui remplissent le complement d'une telle parabole.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

151. TROUVER *le centre de percussion d'un triangle isoscele agité autour de sa base.* FIG. 19.

Il est clair que les vîtesse seront entr'elles comme les $DP = a - x$, que l'on considére comme le bras de la figure. Multipliant donc $ydx = \frac{bxdx}{a}$ par $a - x$, on aura $bxdx - \frac{bxxdx}{a} =$ à la différentielle des momens, & $abxdx - 2bxxdx + \frac{bx^3dx}{a} =$ à celle des forces, dont l'intégrale $= \frac{abxx}{2} - \frac{2bx^3}{3} + \frac{bx^4}{4a}$, laquelle étant divisée par la somme des poids $= \frac{bxx}{2} - \frac{bx^3}{3a}$, donnera $\frac{6aa + 3xx - 8ax}{6a - 4x}$ pour la distance de l'axe de balancement BC au centre de percussion du trapeze indéterminé $BMMC$, & $\frac{1}{2}a$ pour celle du triangle entier, parce que x devient $= a$. Ainsi ce centre doit se trouver au milieu de la ligne AD. En effet les distances de l'axe ou de la base du triangle sont reciproquement proportionnelles à des droites paralleles à la base, & également distantes du milieu, ainsi les efforts respectifs qui sont en raison composée des raisons des grandeurs & des distances, seront égaux, & par conse-

quent le centre des forces doit se trouver au milieu de la ligne *AD*.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

FIG. 12. 152. TROUVER *le centre de percussion d'un espace parabolique agité autour d'une ligne qui passe par son sommet parallelement à sa base.*

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 120. on aura pour la différentielle des momens $x^{\frac{3}{2}}dx$, & pour celle des forces $x^{\frac{5}{2}}dx$, dont l'intégrale $= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$, laquelle étant divisée par $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ à la somme des momens, donnera $\frac{5}{7}x$ pour la distance de l'axe de balancement *TT* passant par le sommet *A* au centre de percussion de la portion *MAM*, & $\frac{5}{7}a$ pour celle de l'espace parabolique entier *BAB*, parce qu'en *D*, $x = a$.

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

153. TROUVER *généralement le centre de percussion d'un espace parabolique.*

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 121. on aura pour la différentielle des momens $x^{\frac{1}{m}+1}dx$, & pour celle des forces $x^{\frac{1}{m}+2}dx$, dont l'intégrale $= \frac{m}{3m+1}x^{\frac{1}{m}+3}$, laquelle étant divisée par la somme des momens $= \frac{m}{2m+1}x^{\frac{1}{m}+2}$, donnera $\frac{2m+1}{3m+1}x$ pour la distance de l'axe

de balancement passant par A, au centre de percussion dans MAM, & $\frac{2m+1}{3m+1}a$ dans BAB. Ce qu'il falloit trouver.

Si $m=2$, on aura pour cette distance $\frac{5}{7}a$ comme dans la parabole ordinaire; Si $m=3$, on aura $\frac{7}{10}a$, comme dans la parabole cubique &c.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

154. TROUVER *le centre de percussion d'un espace parabolique* BAB *agité autour de sa base* BB. FIG. 14.

Il est évident que les vîtesses seront entr'elles comme les rayons des arcs décrits par les parties de l'espace parabolique, & que ces rayons sont égaux aux $DP=a-x$, que l'on regarde comme le bras de la figure. Multipliant donc la différentielle des poids $x^{\frac{1}{2}}dx$ par $a-x$, on aura $ax^{\frac{1}{2}}dx - x^{\frac{1}{2}+1}dx =$ à la différentielle des momens laquelle étant encore multipliée par $a-x$, donnera pour celle des forces $aax^{\frac{1}{2}}dx - 2ax^{\frac{1}{2}+1}dx + x^{\frac{1}{2}+2}dx$, dont l'intégrale $= \frac{2}{3}aax^{\frac{1}{2}+1} - \frac{4}{5}ax^{\frac{1}{2}+2} + \frac{2}{7}x^{\frac{1}{2}+3} = \frac{70aax^{\frac{1}{2}+1} - 84ax^{\frac{1}{2}+2} + 30x^{\frac{1}{2}+3}}{105}$; ce qui étant divisé par la somme des momens $= \frac{10ax^{\frac{1}{2}+1} - 6x^{\frac{1}{2}+2}}{15}$, donnera $\frac{35aa - 42ax + 15xx}{35a - 21x}$ pour la distance de l'axe de balancement BB au centre de percussion de l'espace $BMMB$, & $\frac{4}{7}a$ pour celle de l'espace entier BAB, parce que x devient $=a$.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

FIG. 12. 155. TROUVER *généralement le centre de percussion d'un espace parabolique agité sur sa base.*

Les mêmes choses étant posées, on aura pour la différentielle des momens $ax^{\frac{1}{m}}dx - x^{\frac{1}{m}+1}dx$, & pour celle des forces $aax^{\frac{1}{m}}dx - 2ax^{\frac{1}{m}+1}dx + x^{\frac{1}{m}+2}dx$, dont l'intégrale $= \frac{m}{m+1}aax^{\frac{1}{m}+1} - \frac{2m}{2m+1}ax^{\frac{1}{m}+2} + \frac{m}{3m+1}x^{\frac{1}{m}+3}$, & divisant cette grandeur par $\frac{m}{m+1}ax^{\frac{1}{m}+1} - \frac{m}{2m+1}x^{\frac{1}{m}+2}$ = à la somme des momens, il viendra après les opérations nécessaires, pour la distance de l'axe de balancement BB au centre de percussion de l'espace $BMMB$, $\frac{\overline{6m^3+5mm+1m}\,aa - \overline{6m^3-8mm-2m}\,ax + \overline{2m^3+3mm+m}\,xx}{\overline{6m^3+5mm+1m}\,a - \overline{3m^3-4mm-m}\,x}$; mais parce que P en D, x devient $= a$, cette grandeur se réduira à $\frac{2m}{3m+1}a$ qui sera la distance cherchée du centre de percussion de l'espace entier à l'axe de balancement BB.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

FIG. 43. 156. TROUVER *le centre de percussion d'un cylindre suspendu par une de ses extremitez autour de laquelle il est balancé.*

Soit le cylindre AB suspendu par son extremité A autour de laquelle il est agité. Il est évident que les vîtesses de toutes les petites parties égales de ce corps seront entr'elles à cause des tems égaux en même raison que les espaces par-

courus; c'est-à-dire comme les arcs qu'elles décrivent dans leur mouvement, & par conséquent comme les rayons ou les distances du point de suspension. Soit donc nommé l'axe AB du cylindre, a; sa partie quelconque AP, x; la circonférence de sa base, c; & son rayon r; on aura* pour la différentielle des momens $\frac{crxdx}{2}$, & pour celle des forces $\frac{crxxdx}{2}$, dont l'intégrale $=\frac{crx^3}{6}$, laquelle étant divisée par la somme des momens $=\frac{crxx}{4}$, donnera $\frac{2}{3}x$ pour la distance de l'axe de balancement passant par A au centre de percussion de la partie du cylindre qui a pour hauteur AP, & $\frac{2}{3}a$ pour celle du cylindre entier, laquelle n'est pas différente de celle du centre de pesanteur du triangle. Et en effet à cause des poids égaux, les vîtesses sont entr'elles comme les droites qui remplissent un triangle; donc &c.

* Art. 118.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

157. TROUVER *le centre de percussion d'un cylindre agité autour d'un point* R *de son axe prolongé.* FIG. 43.

Ayant nommé RB, a; RA, b; AP, x; donc $RP=b+x$, & $AB=a-b$, on aura pour la différentielle des momens $\frac{bcrdx+crxdx}{2}$: mais les vîtesses des petits poids égaux du Solide sont entr'elles comme les arcs décrits du point R par ces poids, ou comme les rayons ou distances du point R; ainsi les forces seront entr'elles comme les droites qui remplissent un trapeze décrit par le cylindre. Multipliant donc la différentielle des momens par $b+x$, on aura pour celle des forces $\frac{bbcrdx+2bcrxdx+crxxdx}{2}$, dont l'intégrale $=\frac{bbcrx}{2}+\frac{bcrxx}{2}+\frac{crx^3}{6}$ laquelle étant di-

visée par la somme des momens $= \frac{bcrx}{2} + \frac{crxx}{4}$, donne $\frac{6bb+6bx+2xx}{6b+3x}$ pour la distance de l'axe de balancement passant par le point R au centre de percussion de la partie qui a pour hauteur AP agitée autour de ce point, & $\frac{2aa+2ab+2bb}{3a+3b}$ pour celle du cylindre entier, parce qu'alors x devient $= a - b$. Ainsi il est facile de connoître par quel endroit d'un bâton l'on doit frapper pour donner le plus grand coup qu'il soit possible, en supposant que AR répresente le bras d'un homme, & AB le bâton qui frappe.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

FIG. 9. 158. TROUVER *le centre de percussion d'un cone balancé autour de son sommet* A.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*article* 129. on aura pour la différentielle des momens $\frac{crx^3dx}{2aa}$, & pour celle des forces $\frac{crx^4dx}{2aa}$, dont l'intégrale $= \frac{crx^5}{10aa}$ laquelle étant divisée par la somme des momens $= \frac{crx^4}{8aa}$, donnera $\frac{4}{5}x$ pour la distance de l'axe de balancement passant par le point A au centre de percussion de la partie du cone qui a pour hauteur AP, & $\frac{4}{5}a$ pour celle du cone entier, laquelle n'est pas différente de celle du centre de pesanteur du complement d'une parabole cubique, parce que les forces sont comme les droites qui remplissent ce complement.

Il seroit facile d'avoir aussi le centre de percussion de ce cone s'il étoit balancé autour d'un point de son axe prolongé au delà de son sommet, les vîtesses seroient proportionnelles aux distances de ce point, & les forces seroient comme les droites qui remplissent un triligne composé du complement d'une parabole ordinaire, & de celui d'une parabole cubique.

PROP. XII.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

159. TROUVER *le centre de percussion d'un cone agité par sa base.*

Les vîtesses seront entr'elles comme les $DP = a - x$, multipliant donc la différentielle des momens $= \frac{acrxxdx - crx^3dx}{2aa}$, par $a-x$, on aura pour celle des forces $\frac{aacrxxdx - 2acrx^3dx + crx^4dx}{2aa}$, dont l'intégrale $= \frac{crx^3}{6} - \frac{crx^4}{4a} + \frac{crx^5}{10aa} = \frac{10aacrx^3 - 15acrx^4 + 6crx^5}{60aa}$ en donnant un commun dénominateur, ce qui étant divisé par la somme des momens $= \frac{4acrx^3 - 3crx^4}{24aa}$, donne $\frac{20aa - 30ax + 12xx}{20a - 15x}$ pour la distance de l'axe de balancement BC au centre de percussion du cone tronqué qui a pour hauteur DP, & $\frac{4}{5}a$ pour celle du cone entier, parce qu'alors x devient $= a$. FIG. 9.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

160. TROUVER *le centre de percussion d'une sphére par rapport à l'axe de balancement* AK *perpendiculaire sur* AD.

Les mêmes choses étant posées que dans l'*article* 130. on aura pour la différentielle des momens $cxxdx - \frac{cx^3dx}{2r}$, & pour celle des forces $cx^3dx - \frac{cx^4dx}{2r}$, dont l'intégrale $= \frac{cx^4}{4} - \frac{cx^5}{10r}$ laquelle étant divisée par la somme des momens $= \frac{cx^3}{3} - \frac{cx^4}{8r}$, donne $\frac{30rx - 12xx}{40r - 15x}$ pour la distance de l'axe de balancement aux centre de percussion de la partie de sphere qui a pour hauteur x, & $\frac{6}{5}r$ FIG. 10.

pour celle de la ſphere entiere, parce que x devient $= 2r$.

Il ſera facile de trouver le centre de percuſſion de la moitié de la ſphere ou d'un de ſes ſegmens quelconque.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

161. TROUVER *le centre de percuſſion d'un Conoïde parabolique balancé autour de l'axe* TT *paſſant par le ſommet* A.

FIG. 12.

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art.* 131. on aura pour la différentielle des momens $\frac{cxxdx}{2r}$, & pour celle des forces $\frac{cx^3dx}{2r}$; dont l'intégrale $= \frac{cx^4}{8r}$, laquelle diviſée par $\frac{cx^3}{6r}$, donne $\frac{3}{4}x$, & de là $\frac{3}{4}a$ pour la diſtance cherchée de l'axe de balancement TT au centre de percuſſion du conoïde.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

162. TROUVER *généralement le centre de percuſſion des ces ſortes de Solides.*

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art.* 132. on aura pour la différentielle des momens $\frac{cx^{\frac{2}{m}+1}dx}{2r}$, & pour celle des forces $\frac{cx^{\frac{2}{m}+2}dx}{2r}$, dont l'intégrale $= \frac{mcx^{\frac{2}{m}+3}}{6m+4r}$ laquelle étant diviſée par la ſomme des momens $= \frac{mcx^{\frac{2}{m}+2}}{4m+4r}$, donnera $\frac{2m+2}{3m+2}x$, & de là $\frac{2m+2}{3m+2}a$ pour la diſtance cherchée.

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

163. TROUVER *le centre de percussion d'un sphéroïde elliptique par rapport à l'axe de balancement* B B *passant par* A *perpendiculairement sur le diametre* A D. Fig. 151

Les mêmes choses étant posées que dans l'*art.* 145. on aura pour la différentielle des momens $\frac{2acrxxdx - crx^3dx}{2aa}$ & pour celle des forces $\frac{2acrx^3dx - crx^4dx}{2aa}$, dont l'intégrale $= \frac{crx^4}{4a} - \frac{crx^3}{10aa}$, laquelle divisée par la somme des momens $= \frac{crx^3}{3a} - \frac{crx^4}{8aa}$, donne $\frac{30ax - 12xx}{40a - 15x}$ pour la distaces de l'axe de balancement *B B* au centre de percussion de la partie du sphéroïde qui a pour hauteur x, & $\frac{6}{5}a$ pour celle du sphéroïde entier. Ce qu'il falloit trouver.

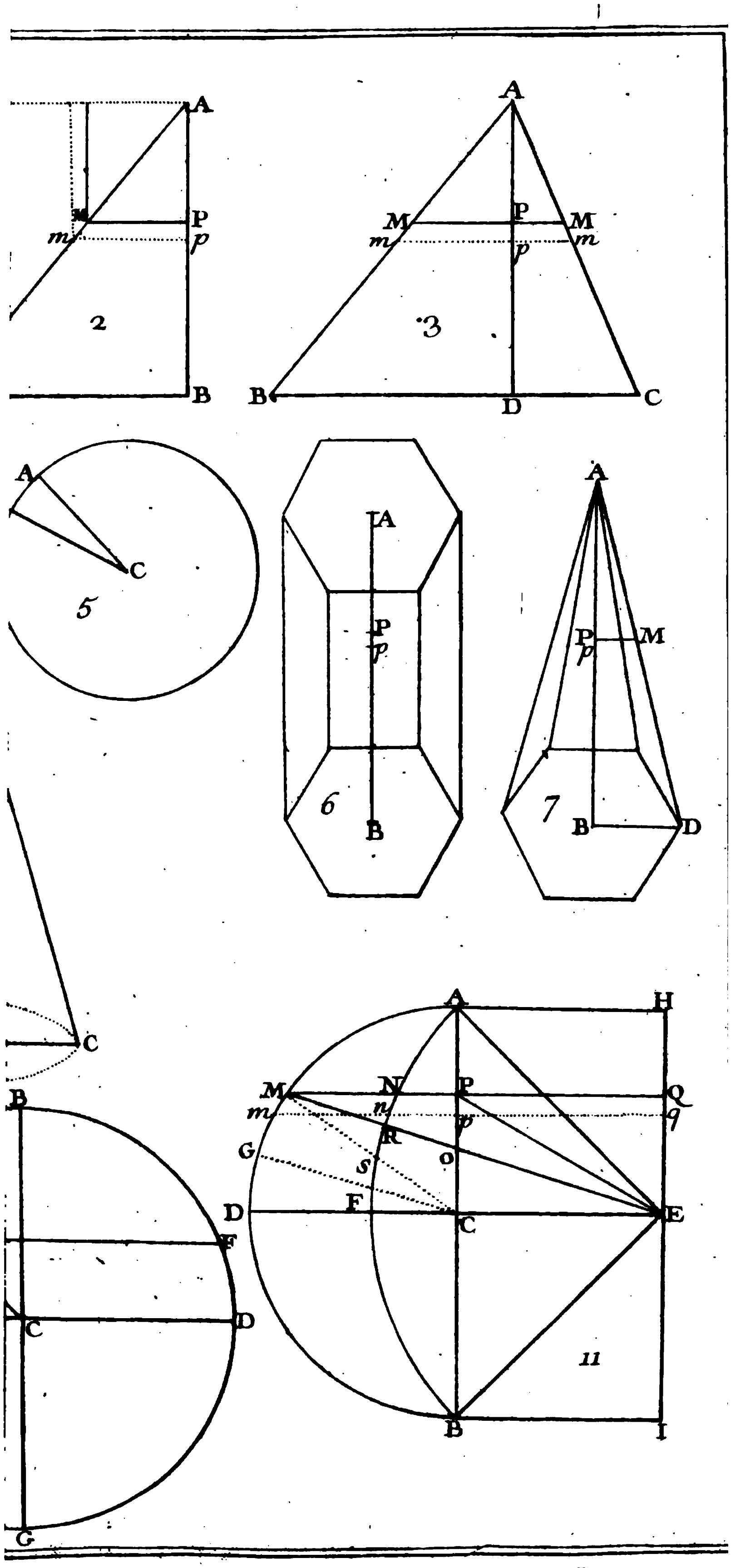
Ces exemples sont plusque suffisans pour faire voir comment on peut appliquer le Calcul intégral aux Centres de percussion. Car de quelque figure que soit un corps en mouvement, & en quelque endroit que l'on suppose le centre de balancement, il faudra toujours prendre le produit de la différence des momens par les vîtesse afin d'avoir la somme des forces. Et si on considére toutes ces forces comme des corps pesans attachez à un levier, il n'y a qu'à chercher leur centre de percussion de la même maniére qu'on a trouvé le centre de pesanteur. Car le centre de percussion est le centre d'équilibre non des poids seulement, mais des poids en mouvement, de sorte que si on soutenoit ce levier par ce point, on soutiendroit en même tems toutes ces forces: car de même que l'on considére le corps pesant comme si toutes ses parties étoient réünies dans le centre de pesanteur; de même aussi le corps en mouvement doit être regardé comme si toutes ses forces étoient ramassées dans le centre de percussion.

ON peut tirer de-là une Méthode pour trouver le Cen-

tre d'Oscillations. Car le centre d'Oscillation d'une figure quelconque est un point dont la distance de l'axe de balancement est égale à la longueur d'un pendule simple, c'est-à-dire d'un corps suspendu à un fil inflexible, & dont on considére toutes les forces de ses parties comme ramassées en un point, & dont les vibrations seroient isochrones à celles de la figure. Ainsi de quelque figure que soit un pendule ou un corps suspendu, on le considere toujours n'ayant de longueur qu'autant qu'il y a de distance du point de suspention au centre de percussion. Par exemple si on agitoit un Conoïde parabolique suspendu par son sommet, & dont on a trouvé la distance du centre de percussion égale aux $\frac{3}{4}$ de son axe, & qu'on voulut avoir un pendule simple qui fit ses vibrations en tems égaux avec le Conoïde, il faudroit prendre sa longueur telle qu'elle fût à la hauteur du Conoïde comme 3 à 4. Car l'on voit évidemment que ces deux pendules seroient isochrones, puisque le centre des forces de l'un & de l'autre seroit également distant du point de suspension. Il en est ainsi des autres figures,

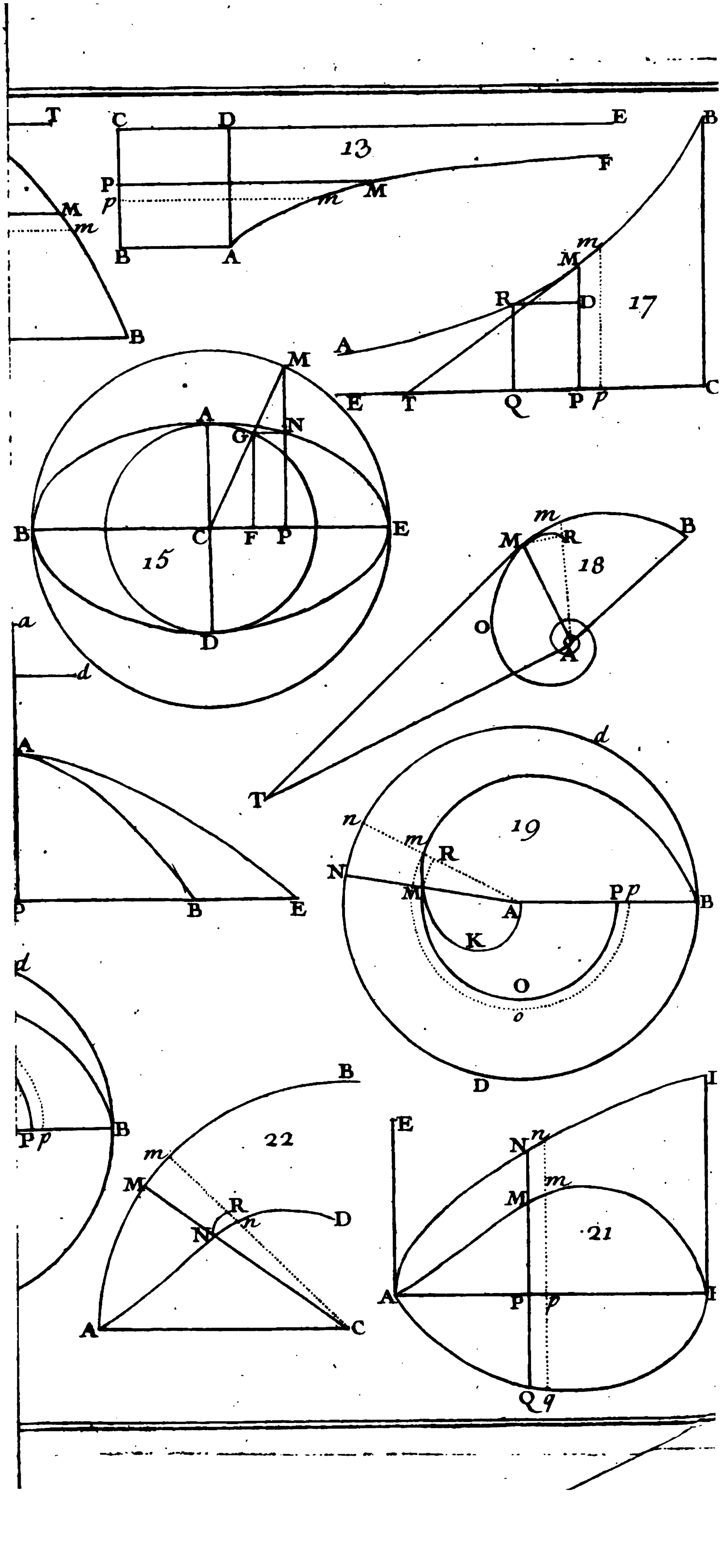
Il seroit très-facile comme l'on voit de grossir cet Ouvrage, & de lui donner l'étendue d'un juste volume, en appliquant la méthode à un plus grand nombre de questions; mais comme ce seroit presque toujours répéter la même chose, le Lecteur n'en deviendroit gueres plus habile, de plus il faut lui laisser le plaisir de l'appliquer lui-même. Ainsi on a jugé à propos d'en demeurer là.

FIN.

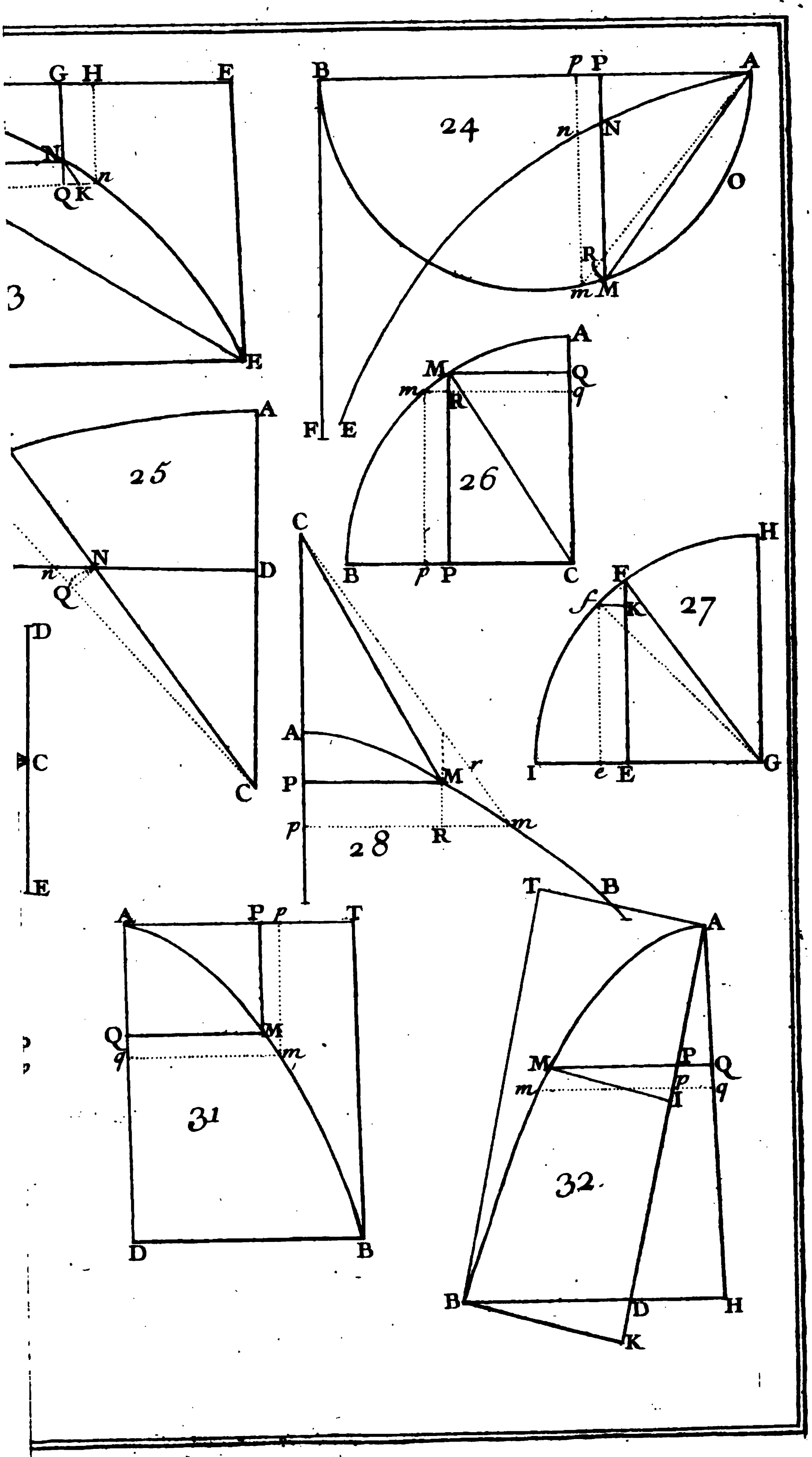


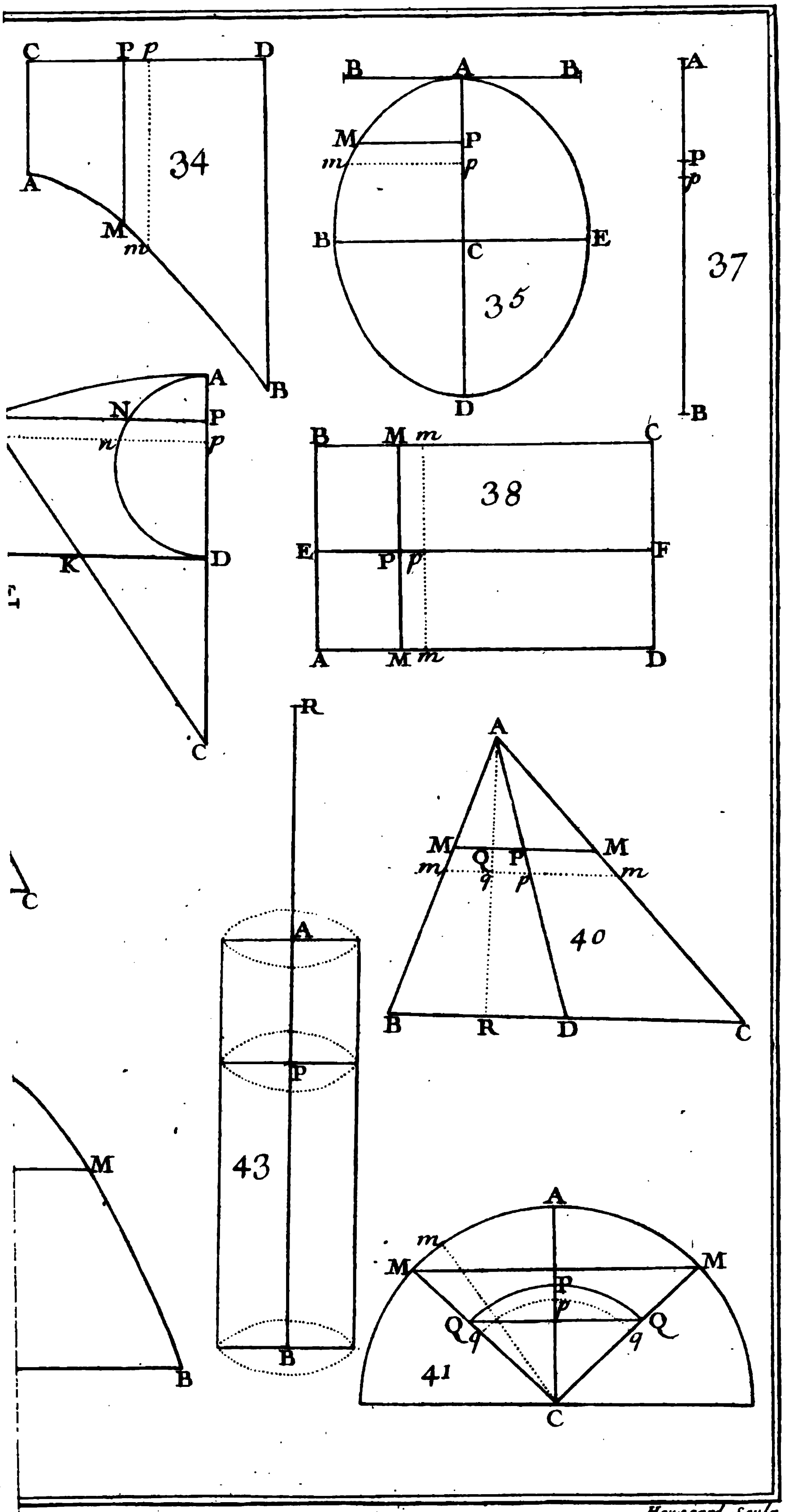
A
P
m
p
2
B
A
M
P
M
m
p
m
3
B
D
C
A
C
5
A
P
p
6
B
A
P
M
p
7
B
D
C
B
F
C
D
G
A
H
M
N
P
Q
m
n
p
q
R
G
s
o
D
F
C
E
11
B
I

UNIV. OF MICH.



13
17
15
18
19
22
21


3
24
25
26
27
28
31
32.



Haussard Sculp.